УДК 536.53:536.55

С. П. ВЯТЧАНИН, А. В. ЛОГИНОВ, А. А. ОВОДОВ

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Проблема измерения низких (<4 К) температур представляет собой довольно сложную задачу, которой в настоящее время уделяется много внимания (см., например, [1—10]). В предлагаемой статье теоретически рассматриваются некоторые из методов измерения низких температур с целью их возможной оптимизации и выяснения предельной чувствительности. Обычно при анализе различных методов термометрии рассматриваются шумы, ограничивающие чувствительность, и неизбежное в процессе измерения нагревание отдельно. В статье сделана попытка учета шумов и нагревания в совокупности.

Основное внимание в статье уделено методам магнитной термометрии, коротко рассмотрено измерение температуры с помощью термосопротивления.

При анализе конкретных схем измерения будем учитывать только принципиально неустранимые шумы. Ради простоты также предполагаем, что время установления теплового равновесия между термостатом и образцом термометра $\tau_{\text{т}}^*$ значительно превышает время наблюдения τ ($\tau_{\text{т}}^* \gg \tau$). Иными словами, рассматривается измерение температуры изолированного тела. Некоторые замечания, относящиеся к случаю $\tau_{\text{т}}^* < \tau$ и обсуждение вопросов, связанных с учетом термодинамических флуктуаций температуры, будут сделаны в § 4.

§ 1. Молекулярные парамагнетики. Одним из довольно широко используемых традиционных методов измерения низких температур является метод измерения магнитной восприимчивости χ образца молекулярного парамагнетика, которая, как известно, зависит от температуры по закону Кюри: $\chi=\lambda/T$. Обычно измерение температуры сводится к измерению индуктивности катушки, заполненной парамагнетиком. Из молекулярных парамагнетиков в низкотемпературной термометрии наиболее популярны два вещества: церий — магниевый нитрат (ЦМН) и дипоколинт церия [2, 3, 11]. В этом параграфе оценки приводятся для ЦМН.

Для оценки предельной чувствительности этого метода можно представить себе следующую идеализированную схему измерения магнитной восприимчивости. Образец парамагнетика известных размеров помещается в точно задаваемое внешнее переменное магнитное поле, и магнитометром измеряется магнитный поток через образец. Зная поток, поле и геометрию образца, можно определить магнитную восприимчивость, а следовательно, и температуру.

1. Сначала рассмотрим случай, когда шумами прибора, ограничивающим точность измерения потока, можно пренебречь по сравнению с собственными тепловыми флуктуациями в образце парамагнетика. Величину этих флуктуаций в образце можно найти из следующих вспомогательных рассуждений. Рассмотрим соленоид, заполненный парамагнетиком. На концах соленоида существуют флуктуации напряжения, спектральная плотность которых определяется формулой Найквиста:

$$U_\omega^2 = 4\varkappa T \operatorname{Re}(z), \tag{1}$$

где $\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — температура, z — комплексное электрическое сопротивление соленоида. Естественно предположить, что флуктуации напряжения вызваны флуктуациями магнитного потока через сечение образца парамагнетика. Тогда нетрудно найти искомую спектральную плотность этих флуктуаций магнитного потока через сечение парамагнетика:

$$\Phi_\omega^2 = \frac{64\,\pi^2\varkappa\,T\,\chi''S}{\omega l}, \tag{2}$$

где S, l — площадь сечения и длина образца парамагнетика, $(\chi'-i\chi'')$ — комплексная динамическая восприимчивость парамагнетика.

Легко показать, что неточность определения температуры, связанная с флуктуациями в образце, равна:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \frac{1}{(4\pi\chi'\,\Phi)^2}\,\frac{\Phi_\omega^2}{\tau}, \tag{3}$$

где $\Phi \simeq HS$ — поток внешнего магнитного поля H через сечение образца ($|\chi| \ll 1$), τ — время наблюдения. Из этой формулы следует, что для уменьшения неточности определения температуры выгодно увеличивать внешнее магнитное поле H. Но с другой стороны, увеличение H приведет к большему нагреванию образца. Увеличение температуры за счет нагревания равно (см., например, [8]):

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\omega\tau}{2}\,\chi''\,\frac{H^2}{c_V T}, \tag{4}$$

где c_V — удельная теплоемкость парамагнетика. Положим $\Delta T = \alpha\delta T$, где α — задаваемый коэффициент, учитывающий степень нагревания. Тогда, приравнивая неточности температуры, определенные в (3) и (4), найдем величину оптимального внешнего поля:

$$H_{\text{opt}}^6 = \frac{16\varkappa\,T\,(c_V\,T)^2}{\alpha^2 V\,(\varkappa')^2\,\varkappa''\,(\omega\tau)^3} \tag{5}$$

и минимальную неточность определения температуры, достигаемую при H_{opt}:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^3_{\min} = 2\alpha\,\frac{\varkappa}{c_V V}\left(\frac{\chi''}{\chi'}\right)^2, \tag{6}$$

где $V = Sl$ — объем образца.

Формула (5) и (6) получены в предположении, что χ' и χ'' не зависят от внешнего поля. Это справедливо, в частности, для парамагнетика, помещенного в добавочное постоянное магнитное поле H_0 ($H_0 \gg H$). Если поля H_0 и H параллельны и $H_0 \ll b$, где b — величина некоторого эффективного поля, связанного с дипольным взаимодействием спинов молекул, то (см., например, [12])

$$\chi' \simeq \chi_0;$$

$$\chi'' \simeq \chi_0\,\frac{H_0^2}{b^2}\,\frac{\omega\tau_{ls}}{1+(\omega\tau_{ls})^2}, \tag{7}$$

где τ_{ls} — время спин-решеточной релаксации. Для ЦМН численная оценка по формуле (6) при $H_0 = 10$ Гс, $\omega\tau_{ls} = 0{,}1$; $T = 1$ К, $\alpha = 1$ дает $\Delta T/T = 2{,}3\cdot 10^{-7}$.

Если же $H_0=0$, то нагревание образца будет пропорционально не H^2, а H^4 [13]. Это соответствует тому, что χ'' зависит от H. Тогда, если пренебречь нагреванием вследствие спин-спиновой релаксации, можно записать ($H \ll b$) [13]:

$$\chi'' \simeq \frac{1}{8} \chi_0 \frac{H^2}{b^2} \frac{\omega\tau_{ls}}{1+(\omega\tau_{ls})^2}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3) и учитывая, что теплоемкость молекулярных парамагнетиков при низких температурах практически равна магнитной теплоемкости ($c_V \simeq \chi_0 b^2/T$), получаем

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{c_V V} \frac{\tau_{ls}}{\tau} \cdot \frac{1}{1+(\omega\tau_{ls})^2}. \tag{9}$$

Таким образом, если $H_0=0$, то неточность определения температуры не зависит от величины внешнего поля. Ограничение на величину H даст условие $\alpha\delta T = \Delta T$. Численная оценка для ЦМН при $\omega\tau_{ls} \ll 1$, $\tau_{ls}/\tau = 0{,}1$ и $T=1$ К дает $\Delta T/T = 3\cdot 10^{-9}$.

2. Теперь рассмотрим, как ограничивают чувствительность шумы прибора. В качестве прибора рассмотрим двухконтактный сквид, работающий в безгистерезисном режиме. Если учитывать только принципиально неустранимые шумы, то чувствительность сквида будет ограничиваться тепловыми шумами Найквиста из-за конечного сопротивления контактов R. Тогда спектральная плотность флуктуаций магнитного потока через кольцо сквида равна (см., например, [14]):

$$\Phi_\omega^2 = \frac{4\varkappa T_{\text{ск}} L \tau_c^*}{1+(\omega\tau_c^*)^2} \simeq 4\varkappa T_{\text{ск}} L \tau_c^*, \tag{10}$$

$T_{\text{ск}}$, L, $\tau_c^* = L/R$ — температура, индуктивность и время электрической релаксации кольца. Если предположить, что шумы прибора превосходят шумы в образце, то таким же образом, как и в предыдущем пункте, можно получить формулы, аналогичные (5) и (6):

$$H_{\text{opt}}^6 = \frac{\varkappa T_{\text{ск}} (c_V V)^2 L \tau_c^*}{\alpha^2 \pi^2 (\chi'\chi'')^2 S^2 \omega^2 \tau^3}; \tag{11}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\min}^3 = 2\alpha \frac{\varkappa}{c_V V} \left(\frac{T_{\text{ск}}}{T}\right) \frac{Ll\omega\tau_c^*}{16\pi^2 S} \frac{\chi''}{(\chi')^2}. \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (6), можно заключить, что шумами сквида можно пренебречь, если

$$\gamma = \frac{Ll\omega\tau_c^*}{16\pi^2 S} \frac{T_{\text{ск}}}{T} < \chi''. \tag{13}$$

Приведем численные оценки. Для ЦМН при $T=1$ К, $H_0=10$ Гс, $\omega\tau_{ls}=10$, $\chi''=5\cdot 10^{-6}$. Параметры сквида можно задать следующие: $T_{\text{ск}}=1$ К, $S=\pi r^2$, $L=4\pi r$, $r=l=1$ см, $\tau_c^*=10^{-8}$ с, $\omega=10$ с$^{-1}$. Тогда $\gamma=2\cdot 10^{-10}$, условие (13) оказывается выполненным, и шумами сквида можно пренебречь. Следует, однако, заметить, что влияние шумов сквида с увеличением частоты растет, тогда как влияние собственных шумов уменьшается (см. (7), (8)). При $\omega \geqslant 400$ с$^{-1}$ и тех же остальных параметрах уже шумы сквида будут определять точность измерения температуры (12).

§ 2. **Ядерные парамагнетики.** 1. Сначала рассмотрим ту же схему измерений, что и в предыдущем параграфе. Оказывается, формулы предыдущего параграфа не будут справедливы для реально используемых ядерных парамагнетиков, так как обычно используются медь и платина, электрическая проводимость которых даже при низких температурах довольно велика. Это приводит к тому, что нагревание, а следовательно и тепловые шумы, определяется не потерями χ'', а токами Фуко.

Предположим, что частота достаточно низка, так что поле проникает в образец. Тогда можно показать, что мощность потерь $\dot{Q}$ в металлическом цилиндре, помещенном в переменное продольное магнитное поле, определяется выражением (см., например, [1, 8]):

$$\dot{Q} = \frac{\omega^2 H^2 V r^2}{8\rho}, \tag{14}$$

где r — радиус поперечного сечения цилиндра, ρ — удельное сопротивление. Соответственно спектральная плотность флуктуаций магнитного потока через сечение цилиндра будет равна:

$$\Phi_\omega^2 = \frac{32\pi^3 \varkappa T r^4}{\rho l} = \frac{32\pi^2 \varkappa T r^2}{R_0}; \tag{15}$$

$$R_0 = \rho \frac{l}{\pi r^2}. \tag{16}$$

И нагревание, и шумы можно уменьшить, если составить образец из тонких изолированных проволок. Тогда в выражениях (14)—(16) ρ и R_0 заменятся на ρN и $R_0 N$, где N — число проволок.

Из сравнения (10) и (15) заключаем, что шумы сквида можно не учитывать, если сопротивление контактов $R \gg R_0$. Обычно для сквида выбирают $R \geqslant 1$Ом. Для медного цилиндра при $T=1$К, $r=l=1$ см, составленного из проволок толщиной 10 мкм ($N=10^6$), $R_0=2\cdot10^{-2}$ Ом. Поэтому действительно шумы сквида можно не учитывать.

Таким же образом, как и в § 1, п. 1, с помощью формул (14—16) можно получить выражения, аналогичные (5, 6):

$$H_{\text{opt}}^6 = \frac{128}{\pi\alpha^2} \frac{\varkappa T (c_V T)^2 \rho N}{r^4 l \omega^4 \chi_0^2 \tau^3}; \tag{17}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^3_{\min} = 2\alpha \frac{\varkappa}{c_V V} \left(\frac{r^2\omega}{2\sqrt{2} N \rho \chi_0}\right)^2 = 2\alpha \frac{\varkappa}{c_V V} \left(\frac{r^2}{4\pi\sqrt{2} N r_{\text{ск}}^2}\right)^2 \chi_0^{-2}, \tag{18}$$

где $r_{\text{ск}} \simeq \sqrt{\rho/2\pi\omega}$ — толщина скин-слоя. Как видно из сравнения (6) и (18), шумами, связанными с токами Фуко, можно пренебречь, если $\frac{r^2}{2\sqrt{2}} \frac{\omega}{\rho N} < \chi''$. Однако можно показать, что фактически всегда в платине и меди преобладают шумы из-за токов Фуко. Численная оценка по формуле (18) для меди при $T=1$ К, $r=1$ см, $N=10^6$, $\omega=6$ с$^{-1}$, $V=1$ см^3 и $\alpha=1$ дает $\Delta T/T=10^{-6}$.

2. Теперь рассмотрим, какую предельную чувствительность можно ожидать от импульсного ЯМР-термометра [1—8]. Схема измерений в этом методе следующая. Образец ядерного парамагнетика поме-

щают в постоянное магнитное поле H_0; спины ядер начинают прецессировать вокруг направления H_0. Действие перпендикулярного H_0 импульсного переменного магнитного поля H_1, имеющего частоту, совпадающую с частотой прецессии, вызывает опрокидывание спинов с последующим излучением. Детектор регистрирует излучение в направлении, перпендикулярном H_0 и H_1. Интенсивность вторичного излучения зависит от статической намагниченности образца $M=\chi_0 H_0$. Время зондирующего импульса выбирается меньше времени спин-спиновой релаксации τ_2, так как импульс вторичного излучения распадается за время τ_2. В ЯМР-термометрии наиболее часто используется платина.

Так же, как и в предыдущем пункте этого параграфа, можно показать, что шумы и нагревание и в этом случае определяются токами Фуко. Магнитный поток через детектор (полезный сигнал) равен [1]:

$$\Phi = 4\pi S \chi_0 H_0 \sin \Phi, \tag{19}$$

где Φ — макроскопический угол, на который переменное поле отклоняет прецессирующий магнитный момент от оси. Обычно $\Phi \ll 1$, и для резонанса [1]

$$\Phi \simeq \Gamma H_1 \tau_0, \tag{20}$$

где Γ — гиромагнитное отношение, τ_0 — время зондирующего импульса. Далее по формуле

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi}{dT}\right)^{-2} \frac{\Phi_\omega^2}{\tau_2}$$

с использованием (15), (19), (20) получаем неточность определения температуры из-за тепловых токов Фуко ($\omega=\Gamma H_0$):

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\varkappa T}{R_0 N S \chi_0^2 \omega^2 H_1^2 \tau_0 \tau_2}. \tag{21}$$

Считая, что нагревание определяется нагреванием электронов (14), с помощью (21) получим выражения для величины оптимального поля и минимальной неопределенности температуры, аналогичные выражениям (5), (6):

$$(H_1)^6_{\text{opt}} = \frac{132\pi}{\alpha} \frac{\varkappa T (c_V T)^2 R_0 N}{\omega^6 l^2 S \tau_0^4 \chi_0^2 \tau_2},$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^3_{\min} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\varkappa}{c_V V} \left(\frac{l}{N R_0 \sqrt{\tau_0 \tau_2}}\right)^2 \frac{1}{\chi_0^2}. \tag{22}$$

Видно, что формулы (22) и (18) отличаются заменой $\sqrt{\tau_0\tau_2}$ на $(\pi\omega)^{-1}$.

§ 3. Термосопротивления. Рассмотрим измерение температуры с помощью сопротивления, имеющего температурную зависимость. Обычно для измерения сопротивления используется мост Уитсона [8]. Максимальная точность достигается при равных плечах моста, когда $\Delta R/R = 4\Delta U/U$ ($\Delta R/R$ и $\Delta U/U$ — относительные ошибки измерения сопротивления и напряжения). Принципиально неустранимыми шумами, определяющими ΔU, являются шумы Найквиста (полагаем, что источник напряжения и прибор не шумят). Тогда при равных плечах моста неточность измерения температуры вследствие этих шумов равна:

$$\Delta T^2 = \frac{64\varkappa TR}{U^2\beta^2\tau}, \tag{23}$$

где R — измеряемое сопротивление; $\beta = \left|\frac{1}{R}\frac{dR}{dT}\right|$; U — напряжение, подаваемое на мост. С другой стороны, увеличение температуры за счет нагревания равно:

$$\delta T = \frac{U^2\tau}{c_V VR}, \tag{24}$$

где V — объем сопротивления. Полагая, как и раньше, $\Delta T = \alpha\delta T$, получим

$$(U)^6_{\text{opt}} = \frac{(c_V V)^2 \varkappa TR^3 2^8}{\alpha^2}; \tag{25}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^3_{\min} = 2^8\,\alpha\frac{\varkappa}{c_V V}\,\frac{1}{(\beta T)^2}. \tag{26}$$

К сожалению, температурная зависимость сопротивлений, применяемых на практике (как правило, из угля или сильно легированного германия), не имеет теоретического объяснения [8]. На практике используется ряд чисто эмпирических формул, справедливость которых установлена только для определенного интервала температур (см., например, [8]). Поэтому дальнейший анализ выражений (25, 26) для всех частных случаев был бы довольно громоздким и здесь не приводится. Отметим только, что слишком резкое возрастание сопротивления с уменьшением температуры неприемлемо, так как тогда реальное сопротивление будет представлять собой параллельно соединенные сопротивление R и емкость C. Это приведет к тому, что в выражениях (30, 31) $\varkappa T$ заменится на $\varkappa T/(1+(\omega RC)^2)$, R — на $R(1+(\omega RC)^2)^{-1/2}$, β — на $\beta(1+(\omega RC)^2)^{-1}$ и тогда вместо выражения (26) получим

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^3_{\min} = 2^8\alpha\,\frac{\varkappa}{c_V V}\,\frac{(1+(\omega RC)^2)}{(\beta T)^2}, \tag{27}$$

т. е. при $\omega RC > 1$ точность ухудшается. Для измерения на постоянном токе вместо ω надо писать $1/\tau$.

§ 4. Замечания к § 1—3. 1. При выводе формул в § 1—3 для простоты полагалось, что время тепловой релаксации между рабочим телом термометра и термостатом $\tau^*_{\text{т}}$ достаточно велико $(\tau^*_{\text{т}} \gg \tau)$. В этом случае вследствие термодинамических флуктуаций температуры [15, 16] точность измерения ее ограничена величиной

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2_{\text{тд}} = \frac{\varkappa}{c_V V}. \tag{28}$$

Поэтому все выражения для минимальной неточности температуры § 1—3 сохраняют свою силу до тех пор, пока она больше термодинамических флуктуаций (28).

При $\tau > \tau^*_{\text{т}}$, пока $c_V V\frac{\tau}{\tau^*_{\text{т}}} < C_{\text{т}}$ ($C_{\text{т}}$ — теплоемкость термостата), во всех формулах надо просто заменить c_V на $c_V \frac{\tau}{\tau_\text{т}^*}$, а при $c_V V \frac{\tau}{\tau_\text{т}^*} > C_\text{т}$ увеличение температуры будет определяться теплоемкостью термостата, т. е. надо заменить $c_V V$ на $C_\text{т}$.

Можно также показать, что при $\tau > \tau_\text{т}^*$ вместо выражения (28) следует записать

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2_\text{тд} \simeq \frac{\varkappa}{c_V V} \frac{\tau_\text{т}^*}{\tau}, \tag{29}$$

т. е. тоже фактически сделать замену c_V на $c_V \tau/\tau_\text{т}^*$. Если $(\Delta T/T)_\text{тд}$ из (29) становится очень малым, то надо учитывать термодинамические флуктуации самого термостата

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \simeq \frac{\varkappa}{C_\text{т}}. \tag{30}$$

Сказанное можно суммировать следующим образом. Минимальная неточность измерения температуры определяется наибольшим из выражений (6), (9), (12), (18), (22), (26) или (28), где под c_V надо понимать:

$$c_V, \text{ если } \tau < \tau_\text{т}^*;$$

$$c_V \frac{\tau}{\tau_\text{т}^*}, \text{ если } \tau > \tau_\text{т}^*, \text{ но } c_V \frac{\tau}{\tau_\text{т}^*} < \frac{c_\text{т}}{V};$$

$$C_\text{т} V^{-1}, \text{ если } \tau > \tau_\text{т}^* \text{ и } c_V \frac{\tau}{\tau_\text{т}^*} > \frac{C_\text{т}}{V}.$$

2. Если неточность измерения температуры определяется не термодинамическими флуктуациями (28), то ее можно уменьшать путем увеличения относительной величины нагревания (уменьшения параметра α). По отношению к величине нагревания можно выделить две предельные ситуации:

а) практически не разрушающее измерения, $\Delta T \approx \delta T$, $\alpha = 1$, нагревание почти незаметно на фоне флуктуаций;

б) измерение с сильным нагреванием, $\Delta T \ll \delta T$.

В последнем случае предполагается, что нагревание можно точно учесть и тогда можно определить температуру в начале измерения с большей точностью, чем в случае *а*. По-видимому, разумно увеличивать δT до $\delta T \simeq T$. При этом $\alpha \simeq \Delta T/T$, а формулы (6), (12), (18), (22), (26) переписываются таким образом, что в них слева вместо $(\Delta T/T)^3$ ставится $(\Delta T/T)^2$.

Авторы глубоко благодарны проф. В. Б. Брагинскому, указавшему на возможность оптимизации термометрических методов и принявшему активное участие в обсуждении результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parker D. S., Corruccini L. R. Cryogenics, 1975, N 7, 499.
2. Hudson R. P., Marshak M., Souler R. J., Dutton D. B. J. Low Temp. Phys., 1975, 20, 1.
3. Лоунасмаа О. В. Принципы и методы получения температур ниже 1 К. М., 1977, гл. 9.
4. Астров Д. Н., Белянский Л. Б. Физика низких температур, 1976, 2, 821.

5. Орлова М. П. Низкотемпературная термометрия. М., 1975.
6. Cataland G., Hudson R. P., Mansum B. W. NBS Technical Note, 1974, N 830.
7. Cutaland G., Plumb H. H. NBS Technical Note, 1973, N 765.
8. Weyhman W. In: Methods of Experimental Physics. N. Y., 1974, vol. 11, ch. 9.
9. International conf. Low Temperatur Physics LT-13. Boulder, 1974.
10. Temperature. Its Measurement and Control in Science and Industry, vol. 4. Pittsburg, 1972.
11. Hudson R. P. Prinsiples and Applications of Magnetic Cooling. Amsterdam—London, 1972.
12. Осика В. И. Канд. дисс. М., 1971.
13. Шапошников И. Г., 1947, ЖЭТФ, 17, 224.
14. Tinkham M. Introduction to superconductivity. N. Y., 1975.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1. М., 1976.
16. Voss R. F., Clarke J. Phys. Rev. B., 1976, 13, 556.

Поступила в редакцию
05.05.78

УДК 530.145:621.385.6

Ф. А. КОРОЛЕВ, А. В. ТУЛУПОВ

ТЕОРИЯ ВЫНУЖДЕННОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

В настоящее время релятивистские электронные потоки стали перспективными источниками излучения большой мощности в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн. Теория приборов, использующих релятивистские электронные потоки, развивается преимущественно классическими методами, использующими зачастую численное интегрирование на ЭВМ. Однако, как отмечено в [1] в связи с рассмотрением теории синхротронного излучения, весьма полезными являются квантовые аналитические методы. На наш взгляд, построение квантовой теории вынужденного синхротронного излучения, применяющегося в ряде современных генераторов когерентного электромагнитного излучения, является закономерным развитием фундаментальных работ по синхротронному излучению [1—3], позволяющим получить ясную физическую картину процессов, происходящих в приборах с винтовыми электронными потоками (как слаборелятивистскими, так и ультрарелятивистскими), показать их аналогию с квантовыми генераторами оптического и СВЧ-диапазонов.

Кроме того, этот метод дает возможность получить важные расчетные формулы, необходимые при последовательной постановке эксперимента.

Рассмотрим вынужденное излучение релятивистского электрона, движущегося по винтовой траектории в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{H}=\{0, 0, H\}$ и взаимодействующего с внешней электромагнитной волной.

Энергетический спектр электрона в данном случае дается выражением [1]:

$$W_n = c\hbar K_n = c\hbar \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n + k_z}, \qquad (1)$$

где $k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$, $\gamma = \frac{eH}{2c\hbar}$, k_z — импульс электрона вдоль поля, n —