СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щелковников Н. К., Букина Л. А., Миронов П. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, 17, № 2, 131.
2. Щелковников Н. К. Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, 17, № 2, 219.
3. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М., 1977, 321—323.
4. Kato H., Phillips O. M. J. Fluid Mech., 1969, 37, p. 4, 643.
5. Wu J. J. Fluid Mech., 1973, 61, p. 2, 275.
6. Einstein H. A., Li H. J. Ing. Mech. Div. of A.S.C.E., 1956, N EM2, p. 945, 1—27.

Поступила в редакцию
12.05.78

УДК 531.381

Ю. В. БАРКИН (СССР), С. М. ЭЛЬ-ШАБУРИ (Египет)

ВОЗМУЩЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВО ВРАЩЕНИИ СПУТНИКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Оскулирующие элементы, основанные на интегрируемой задаче Эйлера—Пуансо, использовались при изучении вращения Земли [1], [2]. В последнее время возродился интерес к подобным переменным. В динамике твердого тела [3], [4], в механике космического полета [5] и в теории поступательно-вращательного движения небесных тел [6], [7] получили применение канонические переменные действие—угол, представляющие собой модификацию переменных, использованных в [1], [2].

В настоящей работе переменные действие—угол используются для изучения вращения спутника.

Рассмотрим вращение твердого спутника относительно собственного центра масс под действием сил притяжения к центральному телу O, относительно которого центр инерции S спутника описывает кеплеровскую круговую орбиту радиуса a.

Пусть $Oxyz$ — инерциальная система координат с началом в центральном теле O, причем плоскость Oxy совпадает с плоскостью орбиты спутника; $Sxyz$ — система координат с началом в центре масс S спутника и с осями, параллельными соответствующим осям системы координат $Oxyz$; система $S\xi\mu\zeta$ совпадает с главными центральными осями инерции спутника. Обозначим через A, B, C главные центральные моменты инерции спутника.

В осях $Oxyz$ движение центра масс спутника определяется координатами $x=a\cos M$, $y=a\sin M$, где $M=nt$ — средняя аномалия, n — среднее орбитальное движение. Вращательное движение спутника опишем каноническими переменными действие—угол [6] L, G, H, l, g, h, где G — модуль кинетического момента $\mathbf{G}$ вращательного движения спутника; H — величина проекции вектора $\mathbf{G}$ на ось Oz; h — долгота восходящего узла промежуточной плоскости Q, нормальной к вектору $\mathbf{G}$ на плоскости Oxy, а величины L, l, g определяются в результате решения уравнений [6]:

$$L_1 = L\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} L'_m \cos 2ml\right);$$

$$l_1 = l + \sum_{m=1}^{\infty} l'_m \sin 2ml;$$
$$(1)$$
$$g_1 = g + \sum_{m=1}^{\infty} g'_m \sin 2ml,$$

где L_1, l_1, g_1 — переменные Андуайе [2]; L_1 — величина проекции вектора G на ось инерции $S\zeta$ спутника; l_1 — угол собственного вращения спутника, отсчитываемый от промежуточной плоскости Q; g_1 — долгота восходящего угла плоскости $S\xi\eta$ спутника на промежуточной плоскости; L'_m, l'_m, g'_m $(m=1, 2, \ldots, \infty)$ — известные функции переменной $b = G^2/L^2$ и постоянного параметра

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) D, \qquad D = \left[\frac{1}{C} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\right].$$

Для кинетической энергии имеем приближенное выражение [6]:

$$T = \frac{L^2}{2D}\left[1 + \frac{1}{8}(b-1)(b+3)e^2\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)G^2,$$

а силовая функция определяется формулой [8]

$$U = k\{[\cos\rho \sin(h-M)(\sin l_1 \sin g_1 - \cos l_1 \cos g_1 \cos\theta_1) -$$
$$- \cos(h-M)(\sin l_1 \cos g_1 + \cos l_1 \sin g_1 \cos\theta_1) +$$
$$+ \sin\rho \sin(h-M)(\cos l_1 \sin\theta_1)]^2 +$$
$$+ \delta[\sin(h-M)(\cos g_1 \sin\theta_1 \cos\rho + \sin\rho\cos\theta_1) + \cos(h-M)\sin\theta_1 \sin g_1]^2\},$$
$$k = (3/2)n^2(A-B);\ \cos\theta_1 = L_1/G;\ \cos\rho = H/G;\ \delta = (A-C)/(A-B).$$

Используя формулы (1), после преобразований функцию U можно представить в виде, весьма удобном для дальнейших исследований. Приведем окончательный результат:

$$U = k \sum_{k_1 k_2 k_3} u_{k_1.k_2.k_3}(\theta, \rho)\cos[k_1 l + k_2 g + k_3(h-M)],$$

причем

$$u_{0.0.0} = -\frac{1}{8}(1-2\delta)[(2-\sin^2\rho) - (2-3\sin^2\rho)\cos^2\theta d_{0.0}^{(0)}] -$$
$$-\frac{1}{4}\sin^2\theta(1-2\sin^2\rho) d_{0.0}^{(2)};$$
$$u_{0.0.2\nu} = -\frac{1}{16}\sin^2\rho(1-2\delta);$$
$$u_{2\sigma.0.0} = \frac{1}{8}(1-2\delta)(2-3\sin^2\rho)\cos^2\theta\cdot d_{0.\sigma}^{(0)} - \frac{1}{4}\sin^2\theta(1-2\sin^2\rho) d_{0.\sigma}^{(2)};$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots$$
$$u_{2m.2\varepsilon.0} = -\frac{\sin^2\rho}{16}(1+\varepsilon\cos\theta)^2 d_{2\varepsilon.m}^{(2)} + \frac{\sin^2\rho}{8}\sin^2\theta(1-2\delta) d_{2\varepsilon.m}^{(0)};$$
$$u_{2m.0.2\nu} = \frac{3}{16}\sin^2\rho[\cos^2\theta(1-2\delta) d_{0.m}^{(0)} - \sin^2\theta d_{0.m}^{(2)}];$$

$$u_{2m.\varepsilon.0} = -\sin 2\rho \sin\theta (\cos\theta + \varepsilon)\, d^{(2)}_{\varepsilon.m} - \frac{1}{8}\sin 2\theta \sin 2\rho d^{(0)}_{\varepsilon.m} (1 - 2\delta);$$

$$u_{2m.2\varepsilon.2\nu} = \frac{\sin^2\theta}{16}(1 + \nu\varepsilon\cos\rho)^2 d^{(0)}_{2\varepsilon.m}(1 - 2\delta) -$$

$$-(1 + \varepsilon\cos\theta)^2 (1 + \nu\varepsilon\cos\rho)^2 d^{(2)}_{2\varepsilon.m};$$

$$u_{2m.\varepsilon.2\nu} = \frac{\sin 2\theta}{16}(\sin 2\rho + 2\nu\varepsilon\sin\rho)(1 - 2\delta)\, d^{(0)}_{2\varepsilon.m} + \sin\theta(\cos\theta + \varepsilon)\, d^{(2)}_{\varepsilon.m};$$

$$\nu,\ \varepsilon = \pm 1; \quad \delta = \frac{A - C}{A - B}; \quad \cos\theta = \frac{L}{G}; \quad \cos\rho = \frac{H}{G},$$

$$(k_1 = 2m = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots;\ k_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2;\ k_3 = 0,\ \pm 2),$$

$$d^{(0)}_{1.0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(2\alpha^4 + 2\alpha^2 - 5)e^2; \quad d^{(0)}_{\varepsilon.1} = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 2 - \varepsilon\alpha)e;$$

$$d^{(0)}_{\varepsilon.2} = \frac{1}{32}(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4 - 3\varepsilon\alpha)e^2; \quad d^{(0)}_{2\varepsilon.0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(\alpha^2 - 3)e^2;$$

$$d^{(0)}_{2\varepsilon.1} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\alpha)e; \quad d^{(0)}_{2\varepsilon.2} = \frac{1}{16}[2 - \varepsilon\alpha(\alpha^2 - 3)]e^2;$$

$$d^{(2)}_{0.0} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 3)e; \quad d^{(2)}_{0.1} = 1;$$

$$d^{(2)}_{0.2} = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)e; \quad d^{(2)}_{\varepsilon.0} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + 3)e;$$

$$d^{(2)}_{1.1} = 1; \quad d^{(2)}_{1.2} = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)e;$$

$$d^{(2)}_{2\varepsilon.0} = \frac{1}{4}(\alpha - \varepsilon)(\alpha - 2\varepsilon)e; \quad d^{(2)}_{2.1} = 1, \quad d^{(2)}_{2.2} = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)e;$$

$$d^{(0)}_{0.0} = 1 - \frac{1}{8}(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 3)e^2; \quad d^{(0)}_{0.1} = e(1 - \alpha^2)\left[1 - \frac{e^2}{64}(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 27)\right];$$

$$\alpha = \frac{G}{L} = \sec\theta.$$

Пусть угловая скорость спутника значительно превосходит среднее орбитальное движение. Тогда, вводя малый параметр $\mu = (n/n_g^{(0)})^2$ ($n_g^{(0)}$ — невозмущенное значение скорости изменения элемента g), гамильтониан задачи представим в форме

$$F = F_0 + \mu F_1, \tag{2}$$

где

$$F_0 = T(L, G, e);$$

$$F_1 = \lambda\left[\sum_{k_1k_2k_3} u_{k_1k_2.k_3}(\theta, \rho)\cos(k_1 l + k_2 g + k_3(h - M))\right],$$

$$\lambda = (3/2)\, n_g^{(0)2}(B - A).$$

Будем искать решение уравнений движения в виде рядов по степеням параметра μ. При $\mu = 0$ получаем формулы, представляющие собой общее решение задачи Эйлера—Пуансо (невозмущенное вращательное движение):

$$L = L_0, \quad l_0 = n_l^{(0)} t + l_{00},$$
$$G = G_0, \quad g_0 = n_g^{(0)} t + g_{00},$$
$$H = H_0, \quad h_0 = h_{00},$$

где L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0 — постоянные интегрирования. Угловые скорости эйлеровского движения $n_l^{(0)}$, $n_g^{(0)}$ определяются приближенными формулами

$$n_l^{(0)} = \frac{L_0}{D}\left[1 - \frac{1}{8}(b_0^2 + 3)e^2\right], \quad n_g^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)G_0 + \frac{G_0}{4D}(b_0 + 1)e^2,$$

где

$$b_0 = G_0^2/L_0^2.$$

Предположим, что невозмущенные значения средних угловых скоростей вращательного движения $n_l^{(0)}$, $n_g^{(0)}$ и орбитального движения несоизмеримы между собой. По известным правилам [9] вычислим возмущения первого порядка для элементов L, G, H, l, g, h. В результате получим

$$l = l_0 + \mu\lambda\left\{\omega_l t + \sum_{k_1k_2k_3}' \frac{1}{s_{k_1k_2k_3}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial L}u_{k_1k_2k_3}\right)_0 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{k_1\varphi_l}{s_{k_1k_2k_3}}(u_{k_1k_2k_3})_0\right]\sin(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3})\right\};$$
$$g = g_0 + \mu\lambda\left\{\omega_g t + \sum_{k_1k_2k_3}' \frac{1}{s_{k_1k_2k_3}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial G}u_{k_1k_2k_3}\right)_0 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{k_2\varphi_g}{s_{k_1k_2k_3}}(u_{k_1k_2k_3})_0\right]\sin(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3})\right\};$$
$$h = h_0 + \mu\lambda\left\{\omega_h t + \sum_{k_1k_2k_3}' \frac{1}{s_{k_1k_2k_3}}\left(\frac{\partial}{\partial H}u_{k_1k_2k_3}\right)_0 \sin(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3})\right\}; \qquad (3)$$
$$L = L_0 - \mu\lambda\sum_{k_1k_2k_3}\frac{k_1}{s_{k_1k_2k_3}}(u_{k_1k_2k_3})_0\cos(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3});$$
$$G = G_0 - \mu\lambda\sum_{k_1k_2k_3}\frac{k_2}{s_{k_1k_2k_3}}(u_{k_1k_2k_3})_0\cos(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3});$$
$$H = H_0 - \mu\lambda\sum_{k_1k_2k_3}\frac{k_3}{s_{k_1k_2k_3}}(u_{k_1k_2k_3})_0\cos(s_{k_1k_2k_3}t + \sigma_{k_1k_2k_3});$$

$$\varphi_l = \frac{1}{D}\left[1 + \frac{3}{8}e^2(b_0^2 - 1)\right], \quad \varphi_g = \frac{e^2}{4D}(3b_0 + 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right); \qquad (4)$$
$$\omega_l = \frac{1 - 2\sin^2\rho}{8G_0}\left[e\alpha_0 \operatorname{tg}^2\theta_0 + 4d_{0.0}^{(2)}\cos\theta_0\right] - \frac{(1-2\delta)}{8G_0}\times$$
$$\times\left[2d_{0.0}^{(0)}\cos\theta_0 - \alpha_0(\alpha_0^2 + 1)e^2(2 - 3\sin^2\rho_0)\right];$$
$$\omega_g = \frac{1 - 2\delta}{16G_0}\left[4\cos^2\rho_0 - \alpha_0(\alpha_0^2 + 1)e^2(2 - 3\sin^2\rho_0)\cos\theta_0 + \right.$$

$$+ 4d_{0.0}^{(0)}(1 - 6\cos^2\rho_0)\cos^2\theta_0] -$$

$$- \frac{1}{8G_0}[(1 - 2\sin^2\rho_0)(e\alpha_0 \sin\theta_0 \operatorname{tg}\theta_0 + 4d_{0.0}^{(4)}\cos^2\theta_0 - 8d_{0.0}^{(0)}\cos^2\rho_0 \sin^2\theta_0)];$$

$$\omega_h = -\frac{\cos\rho_0}{G_0}\left[d_{0.0}^{(2)}\sin^2\theta_0 + \frac{1}{4}(1 - 2\delta)(1 - 3d_{0.0}^{(0)}\cos^2\theta_0)\right];$$

$$s_{k_1k_2k_3} = k_1 n_l^{(0)} + k_2 n_g^{(0)} - k_3 n; \quad \sigma_{k_1k_2k_3} = k_1 l_0 + k_2 g_0 + k_3(h_0 - M_0),$$

$\sum\limits_{k_1k_2k_3}'$ означает, что суммирование производится по всем значениям индексов k_1, k_2, k_3, для которых k_1, k_2 и k_3 не равны нулю одновременно. Коэффициенты ω_l, ω_g и ω_h определяют вековые изменения соответствующих элементов. Формулы (4) позволяют оценить вековые и периодические эффекты во вращательном движении небесных тел.

Рассмотрим численный пример. Пусть главные центральные моменты инерции некоторого тела $A = 0{,}177762 \cdot 10^{11}$ кг·м², $B = 0{,}177592 \cdot 10^{11}$ кг·м², $C = 0{,}179612 \cdot 10^{11}$ кг·м². Пусть тело движется по круговой орбите в поле тяготения центрального тела ($n = 0{,}524$ град/сут). Примем за начальные значения $\theta_0 = 0$, $\rho_0 = 24°28'$,

$$n_g^{(0)} = 350{,}98 \text{ град/сут.}$$

Для указанных значений параметров невозмущенного движения находим:

$$e = -0{,}0567; \quad \delta = -8{,}40909; \quad \mu\lambda = 1{,}45239 \cdot 10^{-6}\, G_0.$$

По формулам (4) вычисляем вековые возмущения элементов вращательного движения l, g, h.

$$\lambda\mu\omega_h = 1{,}174614 \cdot 10^{-5} \text{ град/сут;}$$

$$\lambda\mu\omega_l = -6{,}46587 \cdot 10^{-6} \text{ град/сут;}$$

$$\lambda\mu\omega_g = -2{,}01761 \cdot 10^{-5} \text{ град/сут.}$$

Таким образом, возмущенные скорости изменения элементов l, g меньше соответствующих невозмущенных значений, а скорость прецессии вектора **G** в возмущенном движении превосходит невозмущенное значение.

Авторы благодарны доктору физико-математических наук В. Г. Демину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tisserand F. Traité de mecanique céleste, t. 2. Paris, Gauthier—Villars, 1891.
2. Andoyer H. Cours de mecanique celeste, t. 2. Paris, Gauthier Villars, 1926.
3. Садов Ю. А. Переменные действие—угол в задаче Эйлера—Пуансо. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1970.
4. Баркин Ю. В., Демин В. Г. Прикл. матем. и мех., 1977, 41, 182.
5. Fitzpatrick P. M. Principles of celestcal mechanics. New York, London, Academic Press, 1970.
6. Kinoshyta H. Publ. Astron. Soc. Japan, 1972, 24, 423.
7. Баркин Ю. В. Астрон. журнал, 1977, 54, 413.
8. Баркин Ю. В. Астрон. журнал, 1977, 54, 235.
9. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина. М., 1976.

Поступила в редакцию
25.10.77