СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Н. В., Сидоров В. А., Сусов А. М. Письма в ЖТФ, 1977, 3, 126.
2. Турсунов А. Т. Квантовая электроника, 1975, 2, 114.
3. Danielmeyer H. G. J. Appl. Phys., 1970, 41, 4014.

Поступила в редакцию
29.06.78

УДК 532.51

В. И. ПАВЛОВ, П. М. ТРЕБЛЕР

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Известно, что системы отсчета, жестко связанные с реальными астрофизическими объектами, являются неинерциальными. Особый интерес с этой точки зрения представляют равномерно вращающиеся системы координат. В этом случае изучение волновых взаимодействий в системах гидродинамического типа осложняется действием сил инерции и представляет трудную задачу. Наиболее перспективным подходом представляется метод гамильтоновского формализма для неинерциальных систем отсчета, ранее неизвестный.

Изучение движения безграничной среды во вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ системе координат (относительно инерциальной) основывается на системе уравнений идеальной небаротропной жидкости, которую удобно записать в «π-представлении», где π/ρ — плотность импульса среды, величина, инвариантная в нашей задаче относительно преобразования координат:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{grad}\left\{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2-2\,\frac{\pi}{\rho}[\mathbf{\Omega},\mathbf{r}]\right\}-\left[\frac{\pi}{\rho},\operatorname{rot}\frac{\pi}{\rho}\right]+$$
$$+\left[[\mathbf{\Omega},\mathbf{r}],\ \operatorname{rot}\frac{\pi}{\rho}\right]=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p-\operatorname{grad}\chi; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\mathbf{r}]\right\}=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\mathbf{r}]\right\}\operatorname{grad}s=0. \tag{3}$$

Для замыкания системы уравнений дополним ее уравнением состояния

$$U=U(\rho,s) \tag{4}$$

и основным соотношением термодинамики

$$T\,ds=dU+pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{5}$$

где χ — потенциал внешних сил; все остальные обозначения являются общепринятыми.

Анализ системы (1)—(5) показывает, что во вращающейся системе отсчета среда является неоднородной, за исключением того случая, когда поле сил инерции гасится полем внешних сил.

От системы уравнений (1)—(5) перейдем к гамильтоновскому описанию среды. Гамильтониан в подвижной системе координат имеет вид

$$H=\int\rho\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2-\mathbf{\Omega}\left[\mathbf{r},\ \frac{\pi}{\rho}\right]+U(\rho,\ s)+\chi+\psi(s)\right\}d\mathbf{x}, \tag{6}$$

где $\psi(s)$ — калибровочная функция, явный вид которой находится из условий равновесия [1].

Запишем уравнения непрерывности и адиабатичности в гамильтоновской форме:

$$\dot{\rho}=\frac{\delta H}{\delta\varphi}=\int\left\{\left(\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right)\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)\right\}d\mathbf{x}=$$

$$=-\operatorname{div}\rho\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right\}, \tag{7}$$

$$\dot{s}=\frac{\delta H}{\delta\lambda}=\int\rho\left\{\left(\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right)\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)\right\}d\mathbf{x}=$$

$$=-\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right\}\operatorname{grad}s. \tag{8}$$

Решение системы (7)—(8) относительно π/ρ дает

$$\frac{\pi}{\rho}=\operatorname{grad}\varphi-\frac{\lambda}{\rho}\operatorname{grad}s. \tag{9}$$

Соотношение (9) является аналогом преобразования Клебша для скоростей [2]. Для скорости в подвижной системе координат получаем

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi-\frac{\lambda}{\rho}\operatorname{grad}s-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]. \tag{10}$$

Соотношение (10) отличается от соотношения (57) работы [3], полученного на интуитивном уровне. Из (10) следует, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=-\left[\operatorname{grad}\frac{\lambda}{\rho},\ \operatorname{grad}s\right]-2\mathbf{\Omega},$$

т. е. во вращающейся системе отсчета жидкость совершает вихревое движение, за исключением случая $v=0$ (твердое вращение), но и этот случай может быть реализован только при вполне определенных законах стратификации плотности и энтропии [4].

Вычисляя далее

$$\frac{\delta H}{\delta\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2-\mathbf{\Omega}\left[\mathbf{r},\ \frac{\pi}{\rho}\right]+\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U)+\chi+\psi(s)+$$

$$+\frac{\lambda}{\rho}\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right\}\operatorname{grad}s,$$

$$\frac{\delta H}{\delta s}=\operatorname{div}\lambda\left\{\frac{\pi}{\rho}-[\mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}]\right\}+\rho\left(\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$$

и подставляя (9) в уравнение Эйлера (1), легко убедимся, что его можно представить в форме

$$\operatorname{grad}\left(\dot{\varphi}+\frac{\delta H}{\delta\rho}\right)-\frac{\lambda}{\rho}\operatorname{grad}\left(\dot{s}-\frac{\delta H}{\delta\lambda}\right)-\left(\dot{\lambda}+\frac{\delta H}{\delta s}\right)\frac{\operatorname{grad}s}{\rho}+$$
$$+\left(\dot{\rho}-\frac{\delta H}{\delta\varphi}\right)\frac{\lambda}{\rho^2}\operatorname{grad}s=0.$$

Учитывая, что уравнения непрерывности и адиабатичности имеют вид

$$\dot{\rho}=\frac{\delta H}{\delta\varphi},\quad \dot{s}=\frac{\delta H}{\delta\lambda}, \tag{11}$$

уравнение Эйлера расщепляется на два уравнения

$$\dot{\varphi}=-\frac{\delta H}{\delta\rho},\quad \dot{\lambda}=-\frac{\delta H}{\delta s}. \tag{12}$$

Таким образом, уравнения (11), (12) представляют собой гамильтонову форму записи уравнений гидродинамики (1)—(5) в равномерно вращающейся системе отсчета, а пары переменных (φ,ρ) и (λ,s), введенные соотношением (9), являются каноническими.

Авторы благодарны проф. В. А. Красильникову за постоянную поддержку и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, 17, № 5, 603.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., 1947.
3. Seliger R. L., Whitham G. B. Proc. Roy. Soc., 1968, A305, 1.
4. Гринспен X. Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975.

Поступила в редакцию
05.03.79

УДК 548.0:532.783

В. А. ВЫСЛОУХ, В. А. МАКАРОВ

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА НЕСТАЦИОНАРНУЮ САМОФОКУСИРОВКУ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ*

1. Пространственная дисперсия (ПД) кубической нелинейности оказывает значительное влияние на характер самофокусировки (СФ) мощных световых пучков в изотропной фазе ($T>T^*$, T^* — температура фазового перехода «изотропная жидкость — нематический жидкий кристалл») жидкокристаллических (ЖК) соединений [1—3]. Наиболее существенны тепловой (изменение времени релаксации параметра порядка при нагреве ЖК лазерным излучением [4]) и ориентационный (увеличение радиуса корреляции флуктуаций параметра порядка ЖК в предпереходной области) механизмы ПД. Качественно новые эффекты (все они в том или ином смысле связаны с повышением устойчивости СФ), обусловленные ПД нелинейности, заклю-

* Предварительные результаты доложены на Всесоюзной конференции (см. [1]).