УДК 539.12.01

А. П. ДЁМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. I. ГРУППА $IGL\ (n,\ R)$

Введение. Одной из основных и важных характеристик группы и соответствующей алгебры Ли являются инвариантные операторы (инварианты, имеющие полиномиальную структуру, обычно называют операторами Казимира). Их построение — первый шаг при нахождении представлений группы. Кроме того, алгебраические инварианты имеют прикладное значение, например, при построении инвариантных уравнений, выводе массовых формул и т. п.

Задача отыскания операторов Казимира и их собственных значений для однородных групп была решена в ряде работ (см., напр., [1, 2]). Менее изучен вопрос об инвариантах для неоднородных групп. Хорошо известны операторы Казимира группы Пуанкаре, были найдены также операторы Казимира других неоднородных групп: $ISL(6, C)$ [3], $IU(n)$ с различными подгруппами трансляций [4]. В отличие от однородных, в случае неоднородных групп даже вопрос о существовании и числе инвариантных операторов является довольно сложным. Решению именно этого вопроса в случае неоднородных групп Ли произвольной размерности со всеми классическими однородными подгруппами и посвящен этот цикл работ. Для некоторых конкретных групп низших размерностей найден также явный вид инвариантных операторов. При этом мы ограничимся рассмотрением наиболее естественных неоднородных групп, у которых трансляции преобразуются по векторному представлению однородной подгруппы.

Как мы увидим, с точки зрения инвариантных операторов случаи однородных и неоднородных групп резко отличаются. Известно, что для однородных групп все инварианты полиномиальны и их число весьма просто связано с рангом группы. В случае неоднородных групп инвариантные операторы могут быть рациональными (группа Вейля) или вообще не существовать (группа $IGL(n, R)$), а число инвариантов не всегда связано с размерностью группы, например, группа $ISL(n, R)$ имеет один оператор Казимира для любого n.

Для нахождения инвариантных операторов существуют два метода. Первый из них [5—7] мы используем для изучения групп $IGL(n, R)$, $ISL(n, R)$, $ISp(2n)$, $W(p, q)$. При изучении $IO(p, q)$, $IU(p, q)$, $ISU(p, q)$ необходимо будет использовать и другой метод [8, 9].

В данной статье излагается суть первого метода и анализируется группа $IGL(n, R)$. Показано, что эта группа не имеет инвариантов.

§ 1. Основные определения и метод. Сначала напомним некоторые определения и введем необходимые обозначения.

1. Полупрямое произведение некоторой группы преобразований G и абелевой группы (трансляций) T называется неоднородной группой.

2. Бесконечномерная ассоциативная алгебра A, состоящая из всевозможных полиномов, составленных из генераторов, называется универсальной обертывающей алгеброй данной алгебры Ли. Произведением в этой алгебре является обычное ассоциативное произведение операторов. Отметим, что два полинома считаются равными, если они могут быть приведены друг к другу при помощи заданных перестановочных соотношений в алгебре Ли.

3. Обозначим через S алгебру обычных полиномов n коммутативных переменных.

4. В универсальной обертывающей алгебре A и алгебре полиномов S введем присоединенное представление алгебры Ли.

В случае A каждому генератору F_j алгебры Ли сопоставим соответствующий коммутатор с элементом u из A:

$$[F_j, u] \equiv F_j u - u F_j. \tag{1}$$

В случае S каждому генератору F_j сопоставим некоторый дифференциальный оператор, действующий на полином p из S:

$$\hat{F}_j(p) \equiv \sum_{k,l} C_{je}^{k} a_k \frac{\partial p}{\partial a_e}, \tag{2}$$

где C_{je}^{k} — структурные константы группы.

5. Центры A^I и S^I соответственно алгебр A и S образуют элементы, которые при действии на них любого оператора из присоединенного представления обращаются в ноль.

Совокупность алгебраически независимых элементов центра универсальной обертывающей алгебры A^I называется операторами Казимира.

Идея метода нахождения инвариантных операторов сводится к следующему [5—7]. Нам дана алгебра Ли неоднородной группы. Тем самым определена ее универсальная обертывающая алгебра. Необходимость введения универсальной обертывающей алгебры объясняется тем, что инвариантные операторы принадлежат к ней, образуя ее центр. Можно было бы искать инвариантные операторы заданной алгебры Ли, определяя непосредственно A^I.

Однако удобнее использовать обходный путь — ввести параллельно с универсальной обертывающей алгеброй алгебру обычных полиномов, определив в ней специальным образом присоединенное представление и центр. Как оказывается, найти S^I легче, чем центр универсальной обертывающей алгебры. Условие принадлежности полиномов центру их алгебры, как это видно из определения, формулируется в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\sum_{j,k} C_{ij}^{k} a_k \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \, (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Далее устанавливается линейный изоморфизм центра алгебры полиномов центру универсальной обертывающей алгебры:

$$\Phi(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_r}) = (1/r!) \sum_{\sigma \in \Pi_r} F_{\alpha_{\sigma_1}} F_{\alpha_{\sigma_2}} \ldots F_{\alpha_{\sigma_r}}, \tag{4}$$

где Π_r — группа перестановок r объектов. Как можно доказать [10], общее число решений (как полиномиальных, так и неполиномиальных) системы (3) дается формулой

$$\tilde{\tau} = \dim G - r(G), \tag{5}$$

где $\dim G$ — размерность группы;
$r(G) \equiv \sup\limits_{(a_1 \ldots, a_n)} \operatorname{rank} M$ — точная верхняя грань ранга матрицы M по значениям переменных $a_1, \ldots, a_n$;

$$M_{ij} \equiv \sum_k C_{ij}^k a_k. \tag{6}$$

Отсюда следует, что число τ интересующих нас полиномиальных решений определяется неравенством

$$\tau \leqslant \dim G - r(G). \tag{7}$$

При практических вычислениях удобно воспользоваться критерием [7], который позволяет сразу определить для данной группы тип ее инвариантов. Согласно этому критерию, если любой генератор алгебры Ли можно представить в виде коммутатора двух других

$$[G, G] = G, \tag{8}$$

то группа имеет только полиномиальные инварианты. Ясно, что для таких групп неравенство (7) переходит в равенство. Системы (3), соответствующие группам, которые не удовлетворяют условию (8), могут иметь и неполиномиальные решения (рациональные и даже иррациональные). Для таких групп можно получить лишь верхнюю границу числа операторов Казимира *.

Таким образом, основные этапы нахождения инвариантных операторов заданной группы сводятся к следующему: 1) выписывается алгебра Ли группы; 2) с помощью критерия (8) определяется возможный тип инвариантов; 3) определяется точная верхняя грань ранга матрицы M и находится число инвариантных операторов; 4) для конкретных групп решается система (3) и находится явный вид инвариантных операторов.

§ 2. Группа IGL(n, R). Рассмотрим группу $IGL(n, R)$. Ее алгебра Ли выглядит так:

$$[I_{\mu\nu}, I_{\lambda\tau}] = \delta_{\nu\lambda} I_{\mu\tau} - \delta_{\mu\tau} I_{\lambda\nu},$$

$$[I_{\mu\nu}, P_\rho] = -\delta_{\mu\rho} P_\nu,$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0.$$

Докажем, что эта группа не имеет инвариантных операторов. Для этого покажем, что при некоторых значениях переменных $(a_{11}, \ldots$ $\ldots, a_{nn}, a_{n+1\,1}, \ldots, a_{n+1\,n}$ детерминант матрицы M, определяемой (6), отличен от нуля:

$$\det M \equiv \det C_{\mu\nu,\rho\delta}^{\lambda\tau} a_{\lambda\tau} \neq 0. \tag{9}$$

(Для удобства мы используем двойные индексы.) Отсюда следует, что $\sup\limits_{(a_{11}, \ldots a_{n+1\,n})} \operatorname{rank} M = \dim G$ и поэтому, согласно (5), решений систе-

---

* Вообще говоря, имеется еще два достаточных условия существования только полиномиальных инвариантов, именно: 1) нильпотентность группы; 2) полупростота. Исследуемые нами группы не удовлетворяют ни одному из этих условий.

мы (3) не существует. Доказательство проведем методом математической индукции по размерности группы.

Заметим сначала, что если записать преобразование координат в виде

$$(x'_1, \ldots, x'_n, 1) = (x_1, \ldots, x_n, 1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} & 0 \\ b_{n+1\,1} & b_{n+1\,2} & \ldots & b_{n+1\,n} & 1 \end{pmatrix}$$

и ввести обозначение $P_l \equiv I_{n+1\,l}$, то генераторы трансляций можно рассматривать наравне с генераторами однородных преобразований. В этом случае структурные константы группы и матрица M выглядит так.

$$C^{\lambda\tau}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \delta_{\nu\rho}\,\delta_{\lambda\mu}\,\delta_{\tau\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\lambda\rho}\,\delta_{\tau\nu},$$

$$M_{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\lambda\tau}_{\mu\nu,\rho\sigma}\,a_{\lambda\tau} = \delta_{\nu\rho}\,a_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\,a_{\rho\nu}. \qquad (10)$$

Рассмотрим группу $IGL(1, R)$. Ее алгебра Ли состоит из двух генераторов: I_{11} и $P \equiv I_{21}$ и определяется соотношением

$$[I_{11}, I_{21}] = -I_{21}.$$

Тогда

$$\det M^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{21} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{21}^2 \neq 0,$$

т. е. действительно определитель отличен от нуля.

Проиллюстрируем идею доказательства на примере группы $IGL(2, R)$. Пользуясь (10), получаем определитель $M^{(2)}$:

$$\det M^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & -a_{21} & 0 & -a_{31} & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{11}-a_{22} & a_{12} & -a_{32} & 0 \\ a_{21} & -a_{11}+a_{22} & 0 & -a_{21} & 0 & -a_{31} \\ 0 & -a_{12} & a_{21} & 0 & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Как видно, а) определитель получается из предыдущего определителя $M^{(1)}$, если к последнему добавить строки и столбцы с новыми номерами (12), (22), (31), (32); б) в строках и столбцах (31) и (32) содержатся только переменные a_{31} и a_{32} и только по одному разу; в) одна из этих переменных, в данном случае a_{32}, стоит на пересечении новых строк и столбцов. Поэтому, если положить $a_{31} = 0$, то определитель $M^{(2)}$ будет равен с точностью до отличного от нуля множителя определителю $M^{(1)}$:

$$\det M^{(2)} = a_{32}^{(4)} \begin{vmatrix} 0 & -a_{21} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{32}^4 \det M^{(1)} \neq 0.$$

Обобщим этот результат на случай $IGL(n, R)$.

Предположим, что $\det M^{(n-1)} \neq 0$. Из (10) видно, что при переходе от $IGL(n-1, R)$ к $IGL(n, R)$ появятся просто новые столбцы и строки с номерами $(1n)$, $(2n)$, ..., (nn), $(n+1\ 1)$, ..., $(n+1\ n)$, а в остальном структура матрицы M останется неизменной. В строках и столбцах с номерами $(n+1\ k)$ стоят переменные $a_{n+1\,l}$, соответствующие генераторам трансляций, причем в каждую такую строку и столбец входят все $a_{n+1\,l}$ по одному разу. Действительно, из (10) следует, что, например, для строки

$$M_{n+1\,\nu,\rho\sigma}=\delta_{\nu\rho}\,a_{n+1\,\sigma},$$

так как нет столбца с номером $(\rho\; n+1)$, и для любых ν и σ $(\nu,\sigma=1, \ldots, n)$ существует соответствующий столбец $(\rho=\nu,\sigma)$. Из (10) видно, что $a_{n+1\,n}$ стоит на пересечении строк и столбцов, для которых либо $\mu=n+1$, $\sigma=n$, либо $\rho=n+1$, $\nu=n$, т. е. на пересечении строк и столбцов, добавившихся при переходе от $IGL(n-1,R)$ к $IGL(n,R)$. Значит,

$$\det M^{(n)}\sim a_{n+1\,n}^{(2n-1)}\det M^{(n-1)}\neq 0.$$

Следовательно, полная линейная неоднородная вещественная группа $IGL(n,R)$ не имеет инвариантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Racah G. Group theory and spectroscopy. — CERN, 1968, 1—28.
2. Переломов А. М., Попов В. С. Операторы Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$. — Ядерная физика, 1966, **3**, 924—931. Переломов А. М., Попов В. С. Операторы Казимира для ортогональной и симплектической групп.— Ядерная физика, 1966, **3**, 1127—1134.
3. Кадышевский В. Г., Тодоров И. Т. Группа симметрии $ISL(6)$: представления и инварианты.— Ядерная физика, 1966, **3**, 135—144.
4. Mirman R. Invariants and scalars of compact inhomogeneous unitary algebras.— J. Math. Phys., 1968, **9**, 39—46.
5. Гельфанд И. М. Центр инфинитезимального группового кольца.— Математический сборник, 1950, **26**, 103—112.
6. Beltrametti E. G., Blasi A. On the number of Casimir operators associated with any Lie group.— Phys. Lett., 1966, **20**, 62—64.
7. Abellanans L., Martinez Alonso L. A general setting for Casimir invariants.— J. Math. Phys., 1975, **16**, 1580—1584.
8. Rosen J. Coustruction of invariants for Lie algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal and pseudo-initary groups.— J. Math. Phys, 1968, **9**, 1305—1307.
9. Nagel J., Shah T. Expansion of the inhomogeneous symplectic Lie algebras $T(2n)+Sp(n)$ to $Sp(n+2)$.— J. Math. Phys., 1970, **11**, 1483—1488.
10. Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint. — Ann. Math., 1924, ser. A2, **25**, 294.

Поступила в редакцию
17.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 539.12.01

А. П. ДЁМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. II. ГРУППА $ISL(n, R)$

В предыдущей статье [1] был использован метод [2] нахождения числа и явного вида инвариантных групп и было показано, что у группы $IGL(n,R)$ инвариантные операторы отсутствуют. В настоящей статье, следуя тому же методу, мы покажем, что группа унимодуляр-