бец входят все $a_{n+1\,l}$ по одному разу. Действительно, из (10) следует, что, например, для строки

$$M_{n+1\,\nu,\rho\sigma} = \delta_{\nu\rho}\, a_{n+1\,\sigma},$$

так как нет столбца с номером $(\rho\ n+1)$, и для любых ν и σ $(\nu, \sigma=1, \ldots, n)$ существует соответствующий столбец $(\rho=\nu, \sigma)$. Из (10) видно, что $a_{n+1\,n}$ стоит на пересечении строк и столбцов, для которых либо $\mu=n+1$, $\sigma=n$, либо $\rho=n+1$, $\nu=n$, т. е. на пересечении строк и столбцов, добавившихся при переходе от $IGL(n-1, R)$ к $IGL(n, R)$. Значит,

$$\det M^{(n)} \sim a_{n+1\,n}^{(2n-1)} \det M^{(n-1)} \neq 0.$$

Следовательно, полная линейная неоднородная вещественная группа $IGL(n, R)$ не имеет инвариантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Racah G. Group theory and spectroscopy. — CERN, 1968, 1—28.
2. Переломов А. М., Попов В. С. Операторы Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$. — Ядерная физика, 1966, **3**, 924—931. Переломов А. М., Попов В. С. Операторы Казимира для ортогональной и симплектической групп.— Ядерная физика, 1966, **3**, 1127—1134.
3. Кадышевский В. Г., Тодоров И. Т. Группа симметрии $ISL(6)$: представления и инварианты.— Ядерная физика, 1966, **3**, 135—144.
4. Mirman R. Invariants and scalars of compact inhomogeneous unitary algebras.— J. Math. Phys., 1968, **9**, 39—46.
5. Гельфанд И. М. Центр инфинитезимального группового кольца.— Математический сборник, 1950, **26**, 103—112.
6. Beltrametti E. G., Blasi A. On the number of Casimir operators associated with any Lie group.— Phys. Lett., 1966, **20**, 62—64.
7. Abellanans L., Martinez Alonso L. A general setting for Casimir invariants.— J. Math. Phys., 1975, **16**, 1580—1584.
8. Rosen J. Coustruction of invariants for Lie algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal and pseudo-initary groups.— J. Math. Phys, 1968, **9**, 1305—1307.
9. Nagel J., Shah T. Expansion of the inhomogeneous symplectic Lie algebras $T(2n)+Sp(n)$ to $Sp(n+2)$.— J. Math. Phys., 1970, **11**, 1483—1488.
10. Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint. — Ann. Math., 1924, ser. A2, **25**, 294.

Поступила в редакцию
17.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 539.12.01

А. П. ДЕМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. II. ГРУППА $ISL(n, R)$

В предыдущей статье [1] был использован метод [2] нахождения числа и явного вида инвариантных групп и было показано, что у группы $IGL(n, R)$ инвариантные операторы отсутствуют. В настоящей статье, следуя тому же методу, мы покажем, что группа унимодуляр-

ных вещественных линейных неоднородных преобразований $ISL(n, R)$ имеет один инвариантный оператор при любом n.

1. Генераторы однородных преобразований H_i, $I_{\mu\nu}$ (i, μ, $\nu=1$, ..., n; $\mu\neq\nu$) и трансляций P_τ ($\tau=1$, ..., n) группы $ISL(n, R)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[H_i, H_j] = 0,$$

$$[H_i, I_{\mu\nu}] = \delta_{i\mu} I_{i\nu} - \delta_{i\nu} I_{\mu i} - \delta_{i+1\,\mu} I_{i+1\,\nu} + \delta_{i+1\,\nu} I_{\mu\, i+1},$$

$$[I_{\mu\nu}, I_{\lambda\tau}] = \delta_{\lambda\tau} I_{\mu\tau} - \delta_{\mu\tau} I_{\lambda\tau},$$

$$[I_{\mu\nu}, P_\rho] = -\delta_{\mu\rho} P_\nu,$$

$$[H_i, P_\rho] = \delta_{i+1\,\rho} P_{i+1} - \delta_{i\rho} P_i,$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0.$$

2. Как видно, алгебра Ли группы $ISL(n, R)$ удовлетворяет условию [1, формула (8)] и, значит, все ее инварианты полиномиальны.

3. Переходим к определению числа операторов Казимира. Число параметров группы $ISL(n, R)$, равное $n^2-1+n=n(n+1)-1$, всегда нечетно. Антисимметричность структурных констант группы приводит к тому, что матрица M также антисимметрична. Но определитель антисимметричной матрицы нечетного порядка всегда равен нулю. Значит, эта группа имеет по крайней мере один оператор Казимира.

Покажем, что существует в точности один инвариант. Для этого, в соответствии с [1, (7)], необходимо доказать, что детерминант матрицы M, определенной в [1, (6)], имеет хотя бы один отличный от нуля минор порядка $\dim G-1$.

Чтобы записать матричные элементы в однообразном виде, воспользуемся тем, что генераторы подгруппы Картана $SL(n, R)$ можно выразить через генераторы $GL(n, R)$:

$$H_i = I_{ii} - I_{i+1\,i+1}.$$

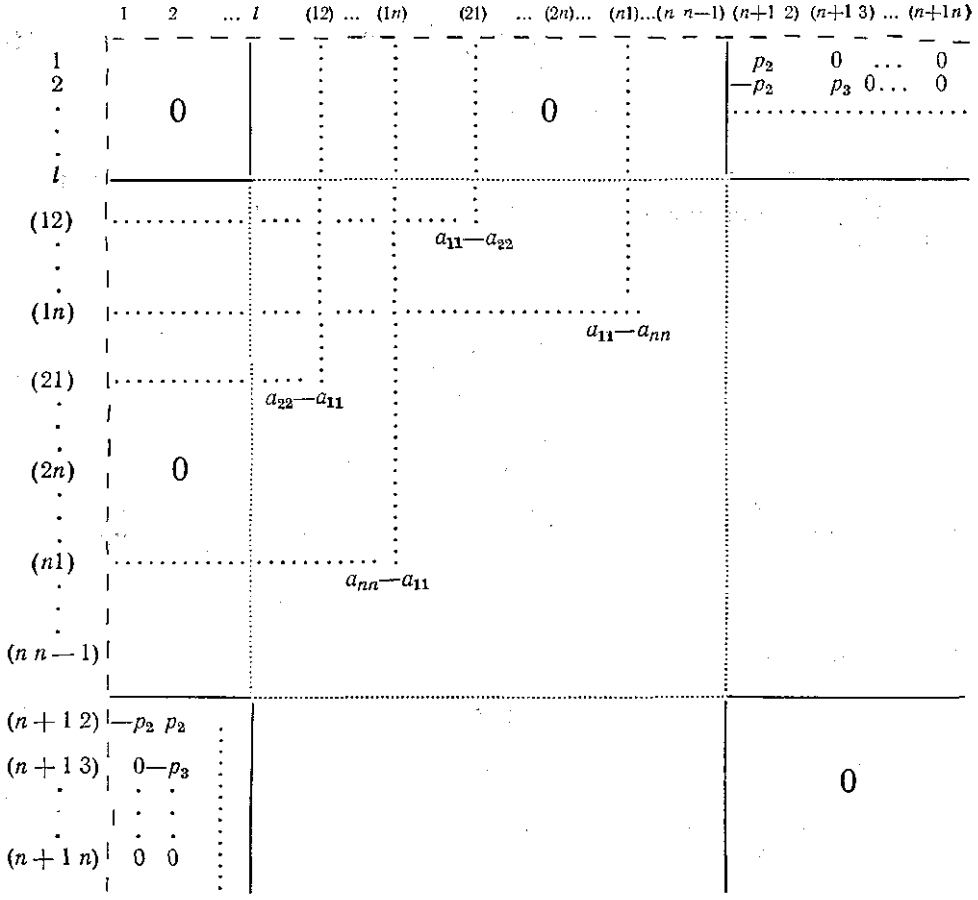
Тогда для матрицы M получаем:

$$M_{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\lambda\tau}_{\mu\nu,\rho\sigma}\, a_{\lambda\tau} = \delta_{\nu\rho}\, a_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\, a_{\rho\tau}\ (\mu,\rho = 1, \ldots, n+1;\ \nu,\sigma = 1, \ldots, n).$$

Для упрощения вида матрицы (по аналогии с [1]) положим равными нулю все переменные $a_{\lambda\tau}$ за исключением тех, которые соответствуют подалгебре Картана и подалгебре трансляций $a_{n+1,\,k} \equiv p_k$. В полученном определителе выберем минор ($\dim G-1$)-го порядка, вычеркнув строку и столбец с номером $(n+1, 1)$. Этот минор имеет вид, изображенный на с. 9.

Элементы миноров в верхнем левом и нижнем правом углах равны нулю в силу коммутативности как генераторов H_j, так и генераторов P_μ.

В строках и столбцах среднего минора, обведенного пунктиром, стоит по одному элементу, потому что генератор $(I_{ii} - I_{i+1\,i+1})$ получается только при коммутации $[I_{i\,i+1},\ I_{i+1\,i}]$. Значит, этот минор отличен от нуля. Элементы миноров, расположенных слева и над ним, равны нулю в силу того, что все переменные $a_{\lambda\tau}$, которые их обра-



зуют, мы положили равными нулю. Элементы двух оставшихся миноров определяются соотношением

$$[H_i, P_j] = \delta_{j\,i+1} P_j - \delta_{i\,j} P_j.$$

Разложение минора M по первой строке приводит к минору, содержащему по-прежнему один элемент в первой строке. Продолжая этот процесс, приходим к среднему минору, который, как отмечалось, отличен от нуля.

Таким образом, весь минор M действительно отличен от нуля, и, следовательно, группа $ISL(n, R)$ имеет в точности один оператор Казимира. В качестве иллюстрации вычислим оператор Казимира группы $ISL(2, R)$. Алгебра Ли этой группы состоит из операторов: $H_1 \equiv (I_{11} - I_{22})$, I_{12}, I_{21}, $P_1 \equiv I_3$, $P_2 \equiv I_{32}$. Соответствующие им переменные в алгебре полиномов обозначим a_1, ..., a_5. Согласно [1, (3)], получим систему уравнений

$$2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - 2a_3 \frac{\partial f}{\partial a_3} - a_4 \frac{\partial f}{\partial a_4} + a_5 \frac{\partial f}{\partial a_5} = 0 \qquad (1)$$

$$-2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial f}{\partial a_3} - a_5 \frac{\partial f}{\partial a_4} = 0 \qquad (2)$$

$$2a_3 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2} - a_4 \frac{\partial f}{\partial a_5} = 0 \qquad (3)$$

$$a_4 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_5 \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0 \tag{4}$$

$$-a_5 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_4 \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0 \tag{5}$$

Чтобы решить эту систему, выразим все частные производные через $\frac{\partial f}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial a_4}$. Уравнения (3), (4), (5) дадут

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial a_2} = -\frac{a_4}{a_5} \frac{\partial f}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f}{\partial a_3} = \frac{a_5}{a_4} \frac{\partial f}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f}{\partial a_5} = \left(\frac{2a_3}{a_4} + \frac{a_1}{a_5} \right) \frac{\partial f}{\partial a_1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получаем два эквивалентных уравнения. Поэтому рассмотрим, например, уравнение (1):

$$\left(a_1 - 2a_2 \frac{a_4}{a_5} \right) \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_4 \frac{\partial f}{\partial a_4} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$f = f(g, a_2, a_3, a_5); \quad g = (a_2 a_4^2/a_5) - a_1 a_4.$$

Продифференцировав ее как сложную функцию и воспользовавшись (6), получим вид всех частных производных с точностью до множителя $h = h(a_2, a_3, a_5)$. Для его определения выразим из системы уравнений (1)—(5) частные производные через $\frac{\partial f}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial a_5}$ и снова найдем все частные производные, содержащие другой множитель. Сравнивая оба выражения для частных производных, найдем $h = h(a_1, a_3, a_5)$. После интегрирования частных производных и сравнения их между собой получаем решение системы уравнений (1)—(5) в виде

$$f = a_1 a_4 a_5 + a_3 a_5^2 - a_2 a_4^2.$$

Поэтому, в соответствии с [1, (4)] получим для оператора Казимира группы $ISL(2, R)$ (для перехода к более компактной по сравнению с симметричной формой мы воспользовались коммутационными соотношениями):

$$C = (I_{11} - I_{22}) P_1 P_2 + I_{21} P_2^2 - I_{12} P_1^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа $IGL(n, R)$. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., астрон., 1980, **21**, № 2, 3—7.
2. Abellanas L., Martinez Alonso L. A general setting for Casimir invariants.— J. Math. Phys., 1975, **16**, 1580—1584.

Поступила в редакцию
17.05.78