сти интегральные оценки, такие, как смещение энергетического центра

$$x_c(z) = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} xI(x, y, z)\, dxdy}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z)\, dxdy},$$

а также эффективная ширина, вычисленная через второй центральный момент. Поскольку тепловая линза является фокусирующей лишь в ограниченной области поперечного сечения пучка, энергетический центр его будет смещаться, а эффективная ширина — увеличиваться. Численный эксперимент показал, что у кольцевых пучков $x_c(z)$ меньше, чем у гауссовых. Это уменьшение обусловлено тем, что максимальная начальная интенсивность кольцевого пучка в $e$ раз меньше, чем у гауссова.

Изменение интегральных характеристик в нелинейной среде не может быть скомпенсировано с помощью амплитудной коррекции в силу пространственной ограниченности положительной тепловой линзы. Поэтому амплитудную компенсацию можно назвать коррекцией по локальной характеристике пучка, а именно по интенсивности на оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выслоух В. А., Кандидов В. П. Теория дифракции и распространения волн. VII Всесоюзный симпозиум. Ростов-на-Дону, с. 274, М., 1977.
2. Егоров К. Д., Кандидов В. П. Теория дифракции и распространения волн. VII Всесоюзный симпозиум. Ростов-на-Дону, с. 270, М., 1977.
3. Алешкевич В. А., Сухоруков А. П. Об отклонении мощных световых пучков под действием ветра в поглощающих средах.— Письма в ЖЭТФ, 1970, 12, 112.
4. Воробьев В. В. Тепловое самовоздействие кольцевых лазерных пучков в движущейся среде.— Квантовая электроника, 1977, 4, № 11, 2330.
5. Pearson J. E., Yeh C. Propagation of laser beams having an on-axis null in the presence of thermal blooming.— J. Opt. Soc. Am. 1976, 66, N 12, 1384.

Поступила в редакцию
20.03.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 535:534.222

В. А. ВЫСЛОУХ, С. С. ЧЕСНОКОВ

# ДВЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Нелинейное самовоздействие светового излучения связано с изменением показателя преломления среды в поле волны. В настоящее время хорошо изучен сравнительно простой случай квазистационарного самовоздействия, возникающий в режиме длинного импульса [1]. Когда в среде распространяются короткие импульсы, картина явления существенно усложняется. В зависимости от длительности импульса преобладающую роль играют различные физические процессы, обзор которых можно найти, например, в [2]. Некоторые режимы нестационарного самовоздействия исследованы численно в [3]. В настоящей работе на основе численного эксперимента рассматриваются две задачи самовоздействия осесимметричного импульса, распространяющегося в слабопоглощающей неподвижной среде. Одна из них связана с образованием акустических волн на фронте импульса, вторая — с нестационарными явлениями теплопроводности.

Распространение светового пучка в нелинейной слабопоглощающей среде описывается так называемым «параболическим» уравнением

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} = \triangle_\perp A + 2k^2\frac{n-n_0}{n_0}A, \tag{1}$$

здесь $A(r, z, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда волны, распространяющейся вдоль оси $z$, $k$ — волновое число, $n$ и $n_0$ — показатели преломления возмущенной и невозмущенной среды соответственно, $\triangle_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ — оператор Лапласа по радиальной переменной.

Начальное условие для $A$ задается на входе в среду (при $z=0$). На бесконечности $A$ обращается в нуль. Уравнение (1) удобно привести к безразмерному виду путем введения следующих переменных

$$\tilde{r} = r/a_0,\ \tilde{z} = z/z_d,\ \tilde{A} = A/|A_0|,$$

здесь $a_0$ — начальный радиус пучка (на входе в среду), $z_d = ka_0^2$ — дифракционная длина, $|A_0|$ — значение начальной амплитуды на оси пучка. В этих переменных уравнение (1) примет вид (тильды у безразмерных переменных здесь и далее опущены):

$$2i\frac{\partial A}{\partial z} = \triangle_\perp A + 2\frac{z_d^2}{a_0^2}\frac{n-n_0}{n_0}A. \tag{2}$$

1. Рассмотрим линейную часть уравнения (2) ($n=n_0$), описывающую в параболическом приближении дифракцию пучка. Для решения воспользуемся методом конечных элементов [4]. Искомую область — круг радиуса $r_{N+1}$ разобьем на элементы, имеющие форму колец шириной $l_n = r_{n+1} - r_n$, $n=0, 1, \ldots, N$. Аппроксимируем комплексную амплитуду поля внутри $n$-го элемента кубическим полиномом

$$A_n(\xi, z) = \psi^{\text{т}}(\xi)[d]\,\mathbf{q}_n(z);\ \psi^{\text{т}} = \{1, \xi, \xi^2, \xi^3\},\ \xi = (r_{n+1} - r_n)/l_n. \tag{3}$$

Здесь $[d]$ — числовая матрица размерности $4\times4$. В качестве обобщенных координат возьмем значения амплитуды и ее радиальных производных $A' = \frac{\partial A}{\partial r}$ на узловых окружностях, ограничивающих элемент

$$\mathbf{q}_n^{\text{т}} = \{A_n, A_n', A_{n+1}, A_{n+1}'\}. \tag{4}$$

Для построения матриц конечного элемента воспользуемся процедурой Галеркина. Подставив (3) в линейную часть (2), в предположении ортогональности полученной невязки к базисным функциям имеем

$$\delta\mathbf{q}_n^{*\text{т}}\left\{2i[M_n]\frac{d\mathbf{q}_n}{dz} - [H_n]\,\mathbf{q}_n\right\} = 0,$$

здесь

$$[M_n] = [d]^{\text{т}}\left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\psi\psi^{\text{т}}\xi\,d\xi\right)[d], \tag{5}$$

$$[H_n] = [d]^{\mathrm{T}} \left( \xi \phi \frac{d\phi^{\mathrm{T}}}{d\xi} \Bigg|_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} - \int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\phi^{\mathrm{T}}}{d\xi} \xi \, d\xi \right) [d].$$

Модель поперечного сечения пучка строится из элементов, с учетом условий непрерывности $A$ и $A'$ на узловых окружностях. Матрицы модели $[M]$, $[H]$ формируются из матриц отдельных элементов $[M_n]$, $[H_n]$. Результирующее уравнение имеет вид

$$\delta \mathbf{q}^{*\mathrm{T}} \left\{ 2i \left[ \begin{array}{c|c} M_{AA} & M_{AA'} \\ \hline M_{A'A} & M_{A'A'} \end{array} \right] \frac{d\mathbf{q}}{dz} - \left[ \begin{array}{c|c} H_{AA} & H_{AA'} \\ \hline H_{A'A} & H_{A'A'} \end{array} \right] \mathbf{q} \right\} = 0, \tag{6}$$

здесь

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}'^{\mathrm{T}}\}; \; A^{\mathrm{T}} = \{A_1, \ldots, A_N\}; \; A'^{\mathrm{T}} = \{A_1', \ldots, A_N'\}.$$

Блоки $[M_{AA}]$, $[H_{AA}]$, $[M_{AA'}]$ и т. д. являются симметричными, трехдиагональными, имеют размерность $N \times N$.

Для уменьшения числа динамических переменных модели дополнительно потребуем непрерывности второй производной амплитуды $A''$ на узловых окружностях. Совместно с граничными условиями это дает линейную связь векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, которую удобно представить в матричной форме $\mathbf{A}' = [\Gamma]\mathbf{A}$, где $[\Gamma]$ — числовая матрица размерности $N \times N$. Исключая $\mathbf{A}'$ из уравнения (6), получим

$$2i [\widetilde{M}] \frac{d\mathbf{A}}{dz} = [\widetilde{H}] \mathbf{A},$$

или

$$2i \frac{d\mathbf{A}}{dz} = [D] \mathbf{A}, \quad [D] = [\widetilde{M}]^{-1} [\widetilde{H}],$$

где $[\widetilde{M}]$, $[\widetilde{H}]$ вычисляются по формулам

$$[\widetilde{M}] = [M_{AA}] + [M_{AA'}][\Gamma] + [\Gamma]^{\mathrm{T}} [M_{A'A}] + [\Gamma]^{\mathrm{T}} [M_{A'A'}][\Gamma],$$

$$[\widetilde{H}] = [H_{AA}] + [H_{AA'}][\Gamma] + [\Gamma]^{\mathrm{T}} [H_{A'A}] + [\Gamma]^{\mathrm{T}} [H_{A'A'}][\Gamma].$$

В результате проведенной процедуры динамическими переменными модели являются только узловые значения амплитуды. Матрица $[D]$ — это дискретный аналог оператора Лапласа $\Delta_{\perp}$ с учетом граничных условий. Можно показать, что развиваемая схема имеет погрешность аппроксимации $O(l^3)$. Численные решения тестовых задач линейной дифракции совпадают с известными аналитическими результатами.

2. Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (2), которое описывает нелинейную рефракцию пучка. При длительностях импульса порядка времени пробега звуковой волны через поперечное сечение пучка (акустическое время) нелинейная рефракция происходит на возмущениях плотности, а явления теплопроводности и конвекции можно не учитывать. Коэффициент преломления среды зависит от ее плотности $\rho$ следующим образом:

$$n = n_0 + \frac{n_0 - 1}{\rho_0} (\rho - \rho_0), \tag{8}$$

здесь $\rho_0$ — плотность невозмущенной среды. Мощность источника тепла, вызывающего возмущение плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$, равна $\alpha I$, где $\alpha$ — коэффициент поглощения среды, $I = \frac{c n_0}{8\pi} |A|^2$ — интенсивность волны. Уравнение для $\tilde{\rho}$ (в дальнейшем тильду опускаем) может быть получено из линеаризованных уравнений состояния идеального газа и гидродинамики в пренебрежении членами, описывающими вязкость и теплопроводность. В движущейся системе координат $z$, $\eta = t - z/c$, связанной с импульсом, оно имеет вид

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2} - c_s^2 \triangle_\perp \rho = (\gamma - 1)\,\alpha \int\limits_0^\eta \triangle_\perp I\, d\eta, \tag{9}$$

здесь $c_s$ — скорость звука, $\gamma$ — показатель адиабаты. Для приведения (9) к безразмерному виду нормируем $r$ на $a_0$, «сопровождающее время» $\eta$ — на длительность импульса $t_и$, $\rho$ — на масштаб плотности $\rho^* = t_и^3 (\gamma - 1)\,\alpha I_0/(a_0^2 \rho_0)$, $I$ — на пиковое значение входной интенсивности. С учетом этой нормировки система (1), (9) примет вид

$$\begin{gathered} 2i\,\frac{\partial A}{\partial z} = \triangle_\perp A + R_s \rho A, \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2} - c^2 \triangle_\perp \rho = \triangle_\perp \left( \int\limits_0^\eta |A|^2\, d\eta \right), \end{gathered} \tag{10}$$

здесь $R_s = 2\,\dfrac{z_d^2}{a_0^2}\,\rho^*\,\dfrac{(n_0 - 1)}{n_0}$ — параметр нелинейности, пропорциональный входной мощности, $c$ — отношение длительности импульса к акустическому времени $t_a = a_0/c_s$.

Первое уравнение системы (10) при использовании метода конечных элементов перейдет в матричное (см. (5))

$$2i\,\frac{d\mathbf{A}}{dz} = [D]\,\mathbf{A} + R_s\,[A]\,\boldsymbol{\rho}, \tag{11}$$

здесь $[A]$ — диагональная матрица, элементами которой являются компоненты $\mathbf{A}$; $\rho$ — вектор узловых значений плотности. Второе уравнение (10) на каждом шаге по $z$ интегрируется по $\eta$ с применением преобразования Фурье — Бесселя. При этом для каждой гармоники справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\rho_\lambda}{d\eta^2} + \lambda^2 c^2 \rho_\lambda = -\lambda^2 \int\limits_0^\eta I_\lambda d\eta, \tag{12}$$

где

$$\rho_\lambda(\eta) = \int\limits_0^\infty \rho(r, \eta)\, J_0(\lambda r)\, r\,dr, \quad I_\lambda = \int\limits_0^\infty I(r, \eta)\, J_0(\lambda r)\, r\,dr, \tag{13}$$

$J_0$ — функция Бесселя нулевого порядка. Вычисление интегралов в соотношениях (13) производится по методу Симпсона. Решение уравнения (12) находится аналитически, так как зависимость $I_\lambda(\eta)$ на каждом шаге по $\eta$ можно аппроксимировать, например линейной функцией. Обратное преобразование Фурье — Бесселя осуществляется по формуле

$$\rho(r, \eta) = \int\limits_0^\infty \rho_\lambda(\eta)\, J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda.$$

Такая схема является консервативной и имеет точность $\sim O(h_\eta^2)$, где $h_\eta$ — шаг по переменной $\eta$. Интегрирование по $z$ производится методом Рунге—Кутта (точность $\sim O(h_z^4)$).

3. Приведем вначале некоторые результаты вспомогательной задачи — численного решения уравнения для плотности в приближении заданной интенсивности

$$I(r, 0, \eta) = \exp[-r^2 - 8(\eta - 1)^2]. \qquad (14)$$

На рис. 1 штриховыми линиями изображено распределение интенсивности (14) в зависимости от $r$. Сплошные линии показывают распределения плотности в тех же сечениях по $\eta$. С течением времени максимум $\rho$ смещается от центра к периферии (возникает цилиндрическая волна плотности). В центре пучка образуется дефокусирущая область пониженной плотности, на периферии — фокусирующие области.

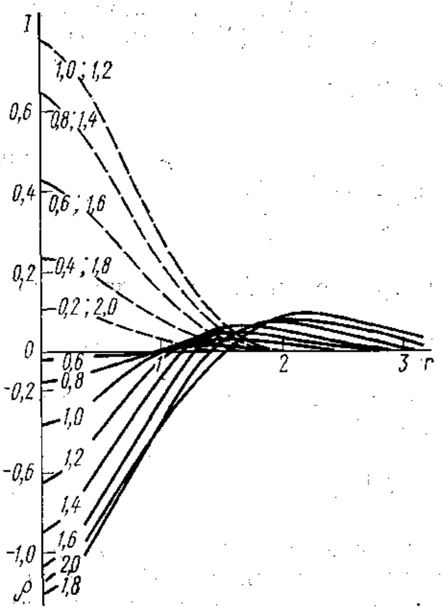


Рис. 1. Радиальное распределение плотности (сплошные линии) в приближении заданной интенсивности (штриховые линии). Текущие значения времени в условных единицах указаны — в разрывах линий ($c=1$)

Ряд результатов численного эксперимента по распространению импульса с начальным распределением интенсивности (14) и плоским фазовым фронтом приведен на рис. 2, *а*. Все три графика рис. 2, *а* относятся к одним и тем же значениям $z=0{,}5$ и $|R_s|=8$; переменной величиной является $c$. Видно, как с течением времени уменьшается интенсивность в приосевой области и возникает аберрационное кольцо. При больших значениях $c$ ($c \sim 3$) профили пучка остаются гауссоподобными и нелинейное уширение невелико. Это объясняется тем, что за время импульса акустическая волна уходит из канала пучка. При малых $c$ ($c \sim 0.3$) тепловое расплывание выражено более ярко и сопровождается заметными аберрациями. Увеличение входной мощности (параметра $R_s$) также приводит к усилению дефокусировки.

Представляет интерес самовоздействие кольцевого пучка, имеющего в поперечном сечении «максвелловское» распределение интенсивности

$$I(r, 0, \eta) = r^2 \exp[-r^2 - 8(\eta - 1)^2]. \qquad (14а)$$

Здесь для $z \leqslant 1$ дифракция приводит к увеличению интенсивности в приосевой области. Кроме того, индуцированная «линза плотности» в некоторой области пучка также является фокусирующей. Соответствующие результаты приведены на рис. 2, *б* для значений $c=1$, $|R_s|=8$, $z=0$; 0,5 и 1. Интересно сравнить энергию, протекающую через площадку единичного радиуса для пучков с распределениями интенсивности (14) — $W_G$ и (14а) — $W_M$ при разных $z$. Для $z=0$; 0,5; 1 отношения $W_M/W_G$ равны соответственно 0,34; 1,06; 1,52. Видно, что выбором начального профиля можно частично скомпенсировать нелинейное расплывание.

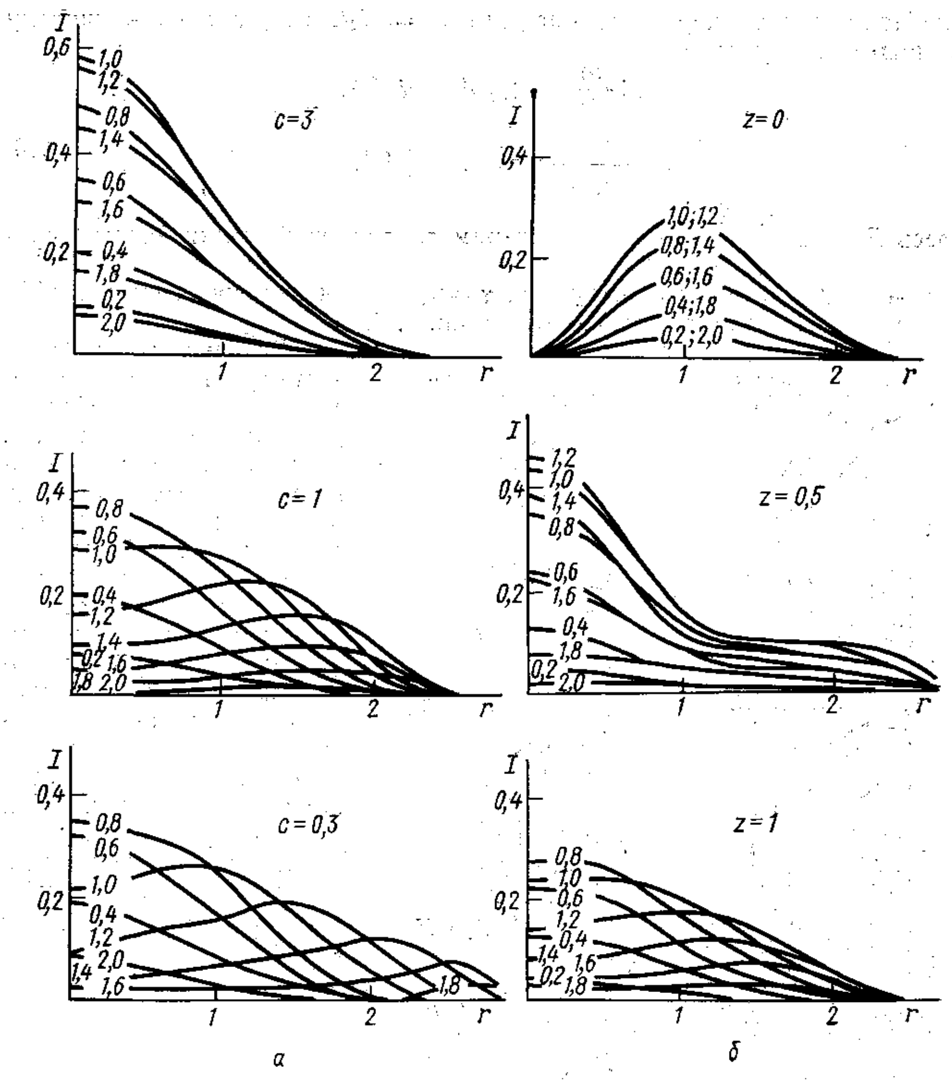


Рис. 2. Влияние параметра c на радиальное распределение интенсивности с начальным условием (14): $|Rs|=8$, $z=0{,}5$ (*а*); зависимость радиальных распределений интенсивности от z с начальным условием (14а): $|Rs|=8$, $c=1$ (*б*). В разрывах линий указаны моменты времени в условных единицах

**4.** Если длительность импульса больше акустического времени, но меньше времени установления стационарной температуры в канале пучка $t_T = \varkappa/(\rho_0 C_p a_0^2)$ (где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $C_p$ — теплоемкость среды), то нелинейная рефракция носит «температурный» характер. В этом случае $n - n_0 = \frac{\partial n}{\partial T}(T - T_0)$, где $T_0$ —

«невозмущенная» температура, и уравнение (2) необходимо решать совместно с нестационарным уравнением теплопроводности

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial \eta} - \varkappa \triangle_\perp T = \alpha I. \qquad (15)$$

Выбирая для температуры масштаб $T^* = \alpha I_0 t_и / \rho C_p$, получаем систему безразмерных уравнений

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = \triangle_\perp A + R_T T A,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} - \chi \triangle_\perp T = |A|^2, \qquad (16)$$

здесь $R_T = 2 \frac{z_d^2}{a_0^2} \frac{1}{n_0} T^* \frac{\partial n}{\partial T}$ — параметр тепловой нелинейности, пропорциональный энергии импульса, $\chi = t_и / t_T$. Для решения системы (16) применяется алгоритм, описанный в п.п. 1, 2.

Результаты расчета нестационарного теплового самовоздействия представлены на рис. 3. Распределение интенсивности на входе в среду изображено в верхней левой части. Остальные профили соответствуют $z=0{,}5$. Из рисунка видно, что рост входной энергии (параметра $|R|_т$) приводит к усилению теплового расплывания и появлению провала интенсивности в задней части приосевой области. При больших $\chi$ дефокусировка носит квазистационарный характер, при малых $\chi$ — существенно нестационарный.

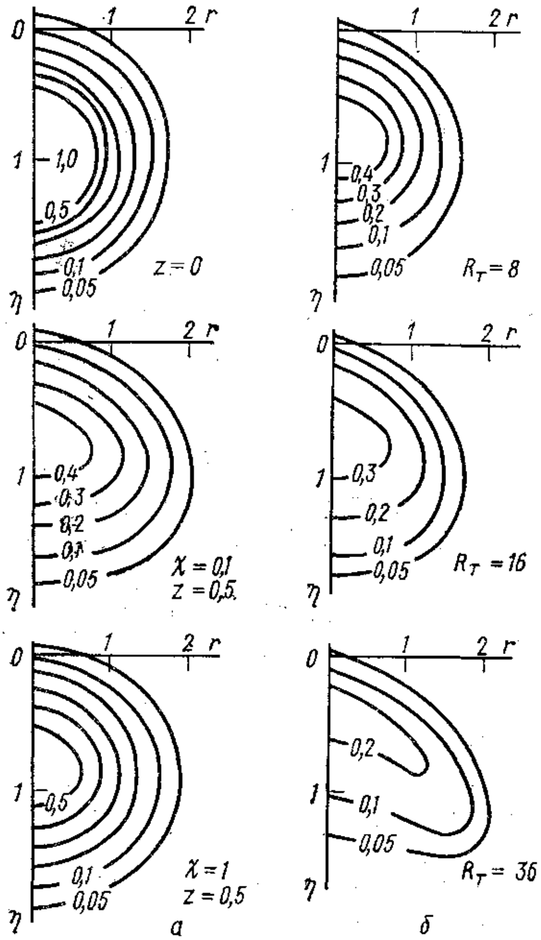


Рис. 3. Пространственно-временное распределение интенсивности при различных значениях $R_T$ и $\chi$: *а* — $|R_T|=8$; *б* — $\chi=0{,}2$; $z=0{,}5$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Akhmanov S. A. et al. Thermal self-action of laser beams. IEEE J. of Quant. Electr., 1968, **QE-4**, 568—575.

2. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. О самофокусировке и самоканализации световых пучков в нелинейной среде.— ЖЭТФ, 1966, 50, 1537—1539.
3. Ulrich P. B., Wallace J. Propagation characteristics of collimated, pulsed laser beams through an absorbing atmosphere. J. Opt. Soc. Am., 1973, 63, 8—12.
4. Выслоух В. А., Кандидов В. П. Метод конечных элементов в задаче о тепловом самовоздействии световых пучков. Тр. VII Всес. симп. по дифр. и распростр. волн. Ростов-на-Дону, М., 1977, 274—277.

Поступила в редакцию
24.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 548.539.1.043

В. Г. ЗУБОВ, А. П. ШТЫРКОВА, Т. М. ГЛУШКОВА, М. М. ФИРСОВА

# ДЕЙСТВИЕ $\gamma$-ОБЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИРОДНОГО КВАРЦА

Известно, что при облучении в реакторе объекты подвергаются действию как нейтронов, так и сопутствующего $\gamma$-излучения. С ростом дозы нейтронов возрастает также и доза $\gamma$-квантов. Оба вида радиации, создавая различные дефекты в облучаемых материалах, приводят к изменению их физических свойств.

Настоящая работа является продолжением исследований, предпринятых с целью выяснения роли отдельных компонент реакторного облучения в радиационном изменении диэлектрических свойств кварца. Ранее мы сообщали [1] об измерении диэлектрической проницаемости $\varepsilon$ и миграционных потерь $\operatorname{tg}\delta$ образцов кварца, облучавшихся в реакторе флюенсом $\Phi_н=2\cdot10^{18}$ н/см$^2$ (сопутствующее $\gamma$-излучение $\Phi_\gamma\sim10^{10}$ Р).

В данной статье излагаются результаты исследования температурно-частотных зависимостей $\varepsilon$ и $\operatorname{tg}\delta$ кварца, облученного только $\gamma$-квантами $^{60}$Co, что является своеобразным моделированием действия $\gamma$-компоненты в реакторе. Облучение проводилось при температуре 20° С в интервале доз $5\cdot10^5$ Р — $2\cdot10^9$ Р. Использовались пластинки толщиной 1—2 мм $z$-среза кварца Уральского месторождения. Электрические параметры измерялись на мосте переменного тока Р571; платиновые электроды наносились на образцы катодным напылением. Причем предварительно были сняты спектры поглощения в области длин волн 200—800 нм на спектрофотометре *Specord*. Облученный кристалл подвергался серии температурных измерений — циклов. Каждый цикл представлял собой постепенный нагрев образца с остановками для измерений его параметров при определенных температурах, заканчивался он отжигом в течение 4—5 часов при максимальной температуре, достигнутой в данном цикле.

Исследования показали, что облучение вызвало характерную для естественного кварца дымчатую окраску и значительное изменение электрических параметров. На рис. 1 приводятся графики температурной зависимости $\varepsilon$ и $\operatorname{tg}\delta$ в интервале частот 0,5—10 кГц образца,