УДК 532.526.3

Д. М. АЛИШАЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В работах [1, 2] исследовано асимптотическое поведение во времени решения линеаризованных относительно среднего состояния уравнений гидродинамики и показано, что возмущения вертикальной скорости равномерно ограничены, на основании чего сделан вывод об устойчивости течения при Ri>0. В [3] показано, что вихрь трехмерного течения неограниченно возрастает со временем, т. е. течение неустойчиво.

Цель данной работы состоит в исследовании асимптотического поведения всех компонент скорости и вихря. Показано, что даже при росте вихря скорость возмущения остается ограниченной при Ri>1/4. В этом случае кинетическая энергия возмущений остается конечной, течение условно устойчиво. При Ri<1/4 горизонтальные компоненты скорости неограниченно растут, однако вертикальная скорость не возрастает при Ri>0. Кинетическая энергия возмущений неограниченно (в линейной теории) растет за счет энергии основного потока, т. е. течение неустойчиво.

Рассмотрим следующую задачу: в стационарный трехмерный плоскопараллельный поток несжимаемой жидкости, направленный вдоль оси x, вносится возмущение. Основным методом изучения устойчивости течения является линеаризация уравнений гидродинамики относительно бесконечно малых возмущений основного потока. Пусть

$$\mathbf{V}=\{U_0+u,\, v,\, w\},\ p=p_0+p_1,\ \rho=\rho_0+\rho_1.$$

Здесь

$$U=U_0(z),\ \rho=\rho_0(z),\ \frac{dp_0(z)}{dz}=-\rho_0 g$$

— параметры основного потока, u, v, w, p_1, ρ_1 — возмущения, обозначения стандартные.

Для удобства обозначим все компоненты возмущений скорости, вихря, плотности и давления u, v, w, r_1, r_2, r_3, ρ_1, p_1 единым символом $A^j(x,y,z,t)$, где $j=1, 2, ..., 8$ соответствует u, v, ..., p_1, а их образы Фурье и Лапласа имеют вид

$$A^j_{kn}(z,t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, e^{-iny} A^j(x,y,z,t)\,dx\,dy,$$

$$A^j_{pkn}=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} A^j_{kn}(z,t)\,dt.$$

Задачу будем решать следующим методом: линеаризуем уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, получим систему уравнений для образов Лапласа и Фурье, выразим из нее все неизвестные функции A^j_{pkn} через A^3_{pkn} (образ Фурье и Лапласа вертикальной скорости). Как известно [1, 2, 4], мы приходим к следующей задаче для $A^3_{pkn} \equiv w_{pkn}$:

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} - \beta\frac{d}{dz} - k^2 - n^2 + \frac{ik(\beta U_0' - U_0'')}{p + ikU_0} - \frac{(k^2+n^2)g\beta}{(p+ikU_0)^2}\right\} w_{pkn} =$$

$$= \frac{1}{p+ikU_0}\left(\frac{d^2}{dz^2} - \beta\frac{d}{dz} - k^2 - n^2\right) w_{kn}(z, 0) - \frac{(k^2+n^2)g\beta}{(p+ikU_0)^2}\rho_{kn}(z, 0),$$

$$w_{pkn}(0) = 0, \quad w_{pkn}(\infty) \to 0. \qquad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$U_0' = \frac{dU_0}{dz}, \quad U_0'' = \frac{d^2U_0}{dz^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz},$$

$w_{kn}(z, 0)$, $\rho_{kn}(z, 0)$ — образы Фурье возмущений плотности и скорости в начальный момент.

Определив $A^3_{pkn}(z)$ из (1) и далее все компоненты A^j_{pkn}, обращением преобразований Лапласа и Фурье мы завершаем решение задачи — получаем асимптотические по времени выражения для $A^j(x, y, z, t)$, $j = 1$—8.

Решение задачи в случае линейного профиля скорости основного потока ($U_0 = Rz$) при изотермической стратификации ($\beta = \mathrm{const}$). Проделав замены:

$$\omega_{pkn}(z) = e^{\beta z/2} W_{pkn}(z), \quad \sigma = \lambda p,$$

$$\lambda = (4k^2 + 4n^2 + \beta^2)^{1/2}/kR, \quad \mathrm{Ri} = g\beta/R^2;$$

$$m^2 = 1/4 - (k^2 + n^2)\,\mathrm{Ri}/k^2, \qquad (2)$$

$$\hat{z} = \lambda kRz, \quad s = \beta/\lambda kR,$$

из уравнения (1) получаем:

$$\left\{\frac{d^2}{d\hat{z}^2} - \frac{1}{4} + \frac{s}{\hat{z} - i\sigma} + \frac{(1/4) - m^2}{(\hat{z} - i\sigma)^2}\right\} W_{pkn} = \frac{X_1(\hat{z})}{\hat{z} - i\sigma} + \frac{X_2(\hat{z})}{(\hat{z} - i\sigma)^2}, \qquad (3)$$

$$W_{pkn}(0) = 0, \quad W_{pkn}(\infty) \to 0.$$

Здесь $X_1(\hat{z})$ и $X_2(\hat{z})$ без труда выражаются через $w_{kn}(z, 0)$, $\rho_{kn}(z, 0)$. Решением дифференциального уравнения с граничными условиями (3) является функция

$$W_{pkn}(\hat{z}) = \int_0^\infty G(\hat{z}, z_0, \sigma)\,[X_1(z_0)/(z_0 - i\sigma) + X_2(z_0)/(z_0 - i\sigma)^2]\,dz_0, \qquad (4)$$

где, как известно [2],

$$G(\hat{z}, z_0, \sigma) = [(-1)^s W_1(\hat{z} - i\sigma)/W_1(-i\sigma)] \times$$

$$\times [W_2(-i\sigma) W_1(z_0 - i\sigma) - W_1(-i\sigma) W_2(z_0 - i\sigma)] \quad \text{при } \hat{z} > z_0, \qquad (5)$$

$$G(\hat{z}, z_0, \sigma) = [(-1)^s W_1(z_0 - i\sigma)/W_1(-i\sigma)] \times$$

$$\times [W_2(-i\sigma) W_1(\hat{z} - i\sigma) - W_1(-i\sigma) W_2(\hat{z} - i\sigma)] \quad \text{при } \hat{z} < z_0.$$

Здесь $W_1(z) = W_{sm}(z)$, $W_2(z) = W_{-sm}(z)$ — вырожденные гипергеометрические функции в обозначениях [5]. Определив все компоненты

A^j_{pkn} из уравнений движения через w_{pkn} и ее производные, получаем с учетом (4), (5) выражения вида

$$A^j_{pkn}(\hat{z}) = \varphi^j_{kn}(\hat{z}) \int\limits_0^{\infty} \frac{d^N G(\hat{z}, z_0, \sigma)}{d\hat{z}^N} \frac{X_B(z_0)}{(\hat{z}-i\sigma)^A (z_0-i\sigma)^B} dz_0. \qquad (6)$$

Здесь $\varphi^j_{kn}(\hat{z})$ — функции, зависящие от параметров основного потока. При возмущении в начальный момент поля скорости $B=1$, поля плотности — $B=2$; для $j=3$, 7, 8, т. е. для возмущений соответственно вертикальной скорости, плотности и давления $A+N=0$ для $j=1$, 2, 6, $A+N=1$, для $j=4$, 5, $A+N=2$. Обращение преобразования Лапласа дает выражения вида

$$A^j_{kn}(\hat{z}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{pt} A^j_{pkn}(\hat{z})\, dp. \qquad (7)$$

Проведем асимптотическую оценку обращения преобразования Лапласа. В (7) C — контур, параллельный мнимой оси, проходящий правее всех особенностей подынтегральной функции (ПФ). Будем сдвигать контур влево. Так как W_1, W_2 — аналитические функции комплексного переменного в области $\mathrm{Re}\, p>0$, особенностями ПФ будут возможные нули функции $W_1(-i\sigma)$, такие что $\mathrm{Re}\, p>0$. Известно [6, 7], что таких нулей при $\mathrm{Re}\, p>0$ нет. Следовательно, контур можно двигать до мнимой оси. Если сдвигать контур далее, то нули стоящей в знаменателе ПФ (7) функции $W_1(-i\sigma)$ (5), лежащие на мнимой оси [6, 7], станут полюсами ПФ. Они дадут вклад в интеграл — дискретную сумму осциллирующих членов, обычно получаемых методом Фурье в классической теории устойчивости.

Особый интерес представляет вторая часть интеграла, описывающая поведение решений, обусловленное непрерывным спектром собственных значений. Оно определяется оставшимися особенностями ПФ, которые, очевидно, — см. (6), (7) — находятся в точках

$$\hat{z} - i\sigma = 0, \quad z_0 - i\sigma = 0.$$

Для учета вклада от этих особенностей разобъем интеграл в (7) на три части:

$$A^j_{kn}(z, t) = \int\limits_0^{\hat{z}-\varepsilon} (\ldots)\, dz_0 + \int\limits_{\hat{z}-\varepsilon}^{\hat{z}+\varepsilon} (\ldots)\, dz_0 + \int\limits_{\hat{z}+\varepsilon}^{\infty} (\ldots)\, dz_0 = J_1 + J_2 + J_3. \qquad (8)$$

Здесь ε — произвольное достаточно малое положительное число. В первом и третьем членах особые точки не сливаются. Так как важно поведение ПФ в окрестности особых точек, разлагаем W_1, W_2 в ряд и оставляем главные члены разложения [5], например:

$$W_1(z) \approx \{\Gamma(-2m)/\Gamma[(1/2)-m-s]\} z^{(1/2)+m} + $$
$$+ \{\Gamma(2m)/\Gamma[(1/2)+m-s]\} z^{(1/2)-m}. \qquad (9)$$

Аналогичное разложение нетрудно выписать и для $\dfrac{d^N W_{1,2}}{d z^N}$.

Для простоты проведем детальный анализ для реальных m, тогда только последние члены в (9) играют существенную роль. Учитывая

(9), (5), (6), (7), можно заметить, что интегралы J_1, J_3 в (8) по контуру C принимают простой вид и легко вычисляются при учете равенства [5]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{pt}(a+p)^l\,dp = \frac{e^{-at}}{\Gamma(l)}\,t^{-l-1},\ \operatorname{Re} l < 0.$$

Интегрируя далее по частям, получаем оценки для интегралов J_1, J_3 в (8):

$$\begin{gathered} J_1,\ J_3 \sim e^{-ikRzt}\,t^{A+N+m-3/2}(1+o(t)), \\ J_1,\ J_3 \sim e^{-ikRzt}\,t^{B+m-5/2}(1+o(t)), \\ J_1,\ J_3 \sim t^{B+m-5/2}(1+o(t)). \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь не выписаны явно множители, не зависящие от времени. Осталось оценить J_2 в (8). На контуре интегрирования в (8) при учете (5), (6), (7), (9) ПФ ведет себя, как

$$\varphi^j(\hat{z}, z_0, k, n)\cdot(z_0 - i\sigma)^{1/2-m-B}(\hat{z} - i\sigma)^{1/2-m-A-N},$$

где φ^j — ограниченная функция z_0. Оценивая интеграл по z_0 (с учетом малости ε) и обращая преобразование Лапласа, получаем

$$J_2 \sim e^{-ikRzt}\,t^{A+B+N+2m-3}(1+o(t)). \tag{11}$$

Окончательно, складывая J_1, J_2, J_3, с учетом (10), (11) получаем

$$A^j_{kn}(z,\ t) = \tilde{A}^j_{kn}(z)\,e^{-ikRzt}\,t^{A+B+N+2m-3}.$$

Здесь через $\tilde{A}^j_{kn}$ обозначена часть, не зависящая от времени, которая быстро убывает при $|k|$, $|n|\to\infty$, если начальные возмущения дифференцируемы достаточное число раз.

Оценим обращения преобразований Фурье по y при больших t.

Чтобы исследовать поведение во времени возмущений гидродинамических полей $A^j(x, y, z, t)$, осталось обратить преобразования Фурье. Учитывая (12), можно записать:

$$A^j(x,\ y,\ z,\ t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iny}\,e^{ik(x-Rzt)}\,t^{2m+C}\,\tilde{A}^j_{kn}\,dn\,dk.$$

Здесь $C = A+B+N-3$, $m = \sqrt{(1/4)-(k^2+n^2)\mathrm{Ri}/k^2}$. В точке $L = x - Rzt$, т. е. в точке, сносимой по потоку, имеем:

1. Для двумерных возмущений ($\tilde{A}^j_{kn} = \delta(n)\,\tilde{A}^j_k$)

$$A^j(L,\ y,\ z,\ t) = t^{2\sqrt{(1/4)-\mathrm{Ri}}+C}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikLt}\,\tilde{A}^j_k\,dk, \tag{13}$$

здесь $\delta(n)$ — дельта-функция. Картина течения переносится потоком, характеристики растут как $t^{2\sqrt{(1/4)-\mathrm{Ri}}+C}$.

2. Для трехмерных возмущений использование модифицированных методов перевала и стационарной фазы [8] при интегрировании

по n приводит к

$$A^j(L, y, z, t) = t^{2\sqrt{(1/4)-\mathrm{Ri}}+C}/\sqrt{\ln t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikLt}\widetilde{A}_k^j(z, y)\,dk. \qquad (14)$$

Очевидно, что в стационарной точке рост возмущений не превышает роста возмущений в точке, сносимой по потоку (для доказательства достаточно провести грубые оценки, заменив интегралы в (13), (14) их модулями).

Вернемся к исследованию асимптотического поведения решений (1). Нетрудно проверить, что для монотонного профиля скорости справедливы все оценки, приведенные выше, только дискретный спектр будет определяться нулями функции $D(p)$, а не $W_1(-i\sigma)$. Наиболее подробный обзор общих теорем о нулях $D(p)$ имеется в [10]. Существенно, что при $\mathrm{Ri}>(1/4)$ $D(p)$ не имеет нулей в области $\mathrm{Re}\,p>0$ [9].

Обсуждение результатов. В потоке неоднородной жидкости максимальный степенной рост со временем трехмерных возмущений, обусловленный непрерывным спектром задачи, имеет место в точке, сносимой по потоку.

При возмущении в начальный момент поля плотности и поля скорости амплитуды возмущений гидродинамических полей изменяются как

$$\sim t^{2m-1} \text{ для } p_1,\ w,$$
$$\sim t^{2m} \text{ для } u,\ v,\ r_3,\ \rho_1,$$
$$\sim t^{2m+1} \text{ для } r_1,\ r_2,$$

где

$$m = \sqrt{(1/4)-\mathrm{Ri}},\quad \mathrm{Ri} = -\frac{g}{\rho_0}\,\frac{d\rho_0}{dz}\,\frac{1}{(U_0')^2}.$$

При возмущении в начальный момент только поля скорости все оценки домножаются на t^{-1}.

Доказана следующая теорема. Течение неоднородной жидкости условно устойчиво при $\mathrm{Ri}>(1/4)$ всюду в потоке: вихри растут, а скорости ограничены; при $\mathrm{Ri}<(1/4)$ течение неустойчиво относительно возмущений поля плотности: и скорость и вихрь неограниченно растут. Вертикальная компонента скорости убывает, как и в [1, 2], при $\mathrm{Ri}>0$.

Автор глубоко благодарен Л. А. Дикому за руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дикий Л. А. Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости.— Прикл. матем. и мех., 1960, 24, № 2, 249—257.
2. Case K. M. Stability of an idealised atmosphere. Part I.— Phys. Fl. 1960, 3, N 2, 149—155.
3. Арнольд В. И. Замечание о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей.— Прикл. матем. и мех., 1972, 36, № 2, 115—123.
4. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л., 1976, 106 с.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, т. I, М., 1963, 342 с.
6. Дикий Л. А. О корнях функции Уиттекера и функции Макдональда комплексного индекса.— Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960, 24, 943—954.
7. Dyson F. G. Stability of an idealised atmosphere. Part 2. Zeros of the confluent hypergeometric function.— Phys. Fl. 1960. 3. N 2, 155—159.
8. Федорюк М. В. Метод перевала. М., 1977, 495 с.
9. Howard L. N. Note on a paper of John Miles.— Journ. of Fl. Mech. 1961. 10; N 4, 509—512.
10. Йи Чиа-шун. Волновые движения в слоистых жидкостях.— В сб. Нелинейные волны. М., 1977, 271—295.

Поступила в редакцию
26.05.78