СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harris S. E., Neih S. T. K. Acousto-optic tunable filter.— J. Opt. Soc. Amer., 1972, **62**, N 5, 672.
2. Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Дифракция света на ультразвуке в анизотропной среде.— Квантовая электроника, 1975, **2**, № 2, 318.
3. Dixon R. W. Acoustic diffraction of lighe in anisotropic media.— IEEE J. Quant. El., 1967, **QE-3**, 85.

Поступила в редакцию
02.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 536.758

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, А. В. ТОЛСТОПЯТЕНКО

СООТНОШЕНИЯ МАРКОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ СИЛ

Введение. Как известно (см., например, [1]), термодинамика неравновесных процессов занимается двумя типами проблем. Во-первых, исследуются уравнения, которым подчиняются внутренние термодинамические параметры, точнее, неравновесные средние $A_\alpha = \langle B_\alpha \rangle$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Во-вторых, исследуются универсальные соотношения, которые имеют место между диссипационными характеристиками с одной стороны, и флуктуационными — с другой.

К проблемам первого типа относятся хорошо известные соотношения Онзагера (например, [2]), касающиеся линейной части релаксационных уравнений (без внешних сил)

$$\dot{A}_\alpha = -\varphi_\alpha(\mathbf{A}). \tag{1}$$

В настоящей работе будет рассмотрена другая проблема первого типа, а именно вопрос, как по уравнению (1) восстанавливать соответствующее уравнение с внешними силами:

$$\dot{A}_\alpha = -\chi_\alpha(\mathbf{A}, -g), \tag{2}$$

где $\mathbf{g} = \{g_\alpha\}$ — внешние силы, сопряженные с параметрами A_α.

Уже на примере соотношений Онзагера известно, что удобно сделать замену переменных: ввести «внутренние силы»

$$a_\alpha(\mathbf{A}) = \beta^{-1} \frac{\partial \ln w_0(\mathbf{A})}{\partial A_\alpha},$$

где $\beta^{-1} = kT$, а $w_0(\mathbf{B})$ — равновесное распределение случайных внутренних параметров при отсутствии внешних сил. Уравнения (1), (2) преобразуются тогда к виду

$$\dot{A}_\alpha = -\tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{a}(\mathbf{A})); \; \dot{A}_\alpha = -f_\alpha(\mathbf{a}(\mathbf{A}), -\mathbf{g}), \tag{3}$$

причем $\tilde{\varphi}\,(a) = f\,(\mathbf{a}, 0)$. Соотношения Онзагера имеют вид:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha}{\partial a_\beta} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_\beta}{\partial a_\alpha} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Нашей задачей будет получение соотношений, касающихся полных функций $f_\alpha(\mathbf{a}, -\mathbf{g})$.

В настоящей работе получено, что в рамках двухиндексной (линейной) теории уравнение с внешними силами однозначно воссоздается по уравнению без сил; в рамках же трехиндексной теории оно в общем случае воссоздается лишь частично. Полное воссоздание трехиндексного члена имеет место в частном случае, когда рассматривается только один нечетный по времени параметр.

§ 1. Исходные равенства. Пусть $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_r)$ — внутренние термодинамические параметры, которые являются средними от некоторых функций динамических переменных:

$$A_\alpha = \langle B_\alpha(q, p) \rangle.$$

При инверсии времени $t \to -t$, функции $B_\alpha(q, p)$ переходят в $B_\alpha(q, -p)$. Будем предполагать, что

$$B_\alpha(q, -p) = \varepsilon_\alpha B_\alpha(q, +p), \tag{4}$$

т. е. что $B_\alpha(q, p)$ являются собственными функциями оператора инверсии (в противном случае следует вместо $B_\alpha(q, p)$ рассматривать $B_\alpha(q, p) \pm B_\alpha(q, -p)$.

Пусть $B_\alpha(q, p)$ эволюционируют во времени в соответствии с гамильтонианом

$$H(q, p) = H_0(q, p) - \sum_\alpha g_\alpha B_\alpha(q, p), \tag{5}$$

где $H_0(q, p)$ — гамильтониан, четный по времени:

$$H_0(q, -p) = H_0(q, p). \tag{6}$$

Будем предполагать, что $\mathbf{B}(t) \equiv \{B_\alpha[q(t), p(t)]\}$ есть совокупный марковский процесс. Тогда из (4)—(6) тем же способом, что и в [3, 4] (см. также [5]) из условия временной обратимости процесса $\mathbf{B}(t)$ можно получить

$$\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\varepsilon\,\mathbf{a}, -\varepsilon\,\mathbf{g})(-\varepsilon_{\alpha_1})\ldots(-\varepsilon_{\alpha_n}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+m}}(\mathbf{a}, -\mathbf{g})(a_{\alpha_{n+1}} - g_{\alpha_{n+1}})\ldots(a_{\alpha_{n+m}} - g_{\alpha_{n+m}}), \tag{7}$$

где

$$\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\mathbf{a}, -\mathbf{g}) = \int K_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\mathbf{B}, -\mathbf{g})\, w_a(\mathbf{B})\, dB;$$

$K_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(\mathbf{B}, -\mathbf{g})$ — коэффициенты кинетического уравнения при наличии внешних сил (см. Приложение, (41)); а

$$w_a(\mathbf{B}) = N^{-1}\exp(\beta\,\mathbf{aB})\, w_0(\mathbf{B}) \tag{8}$$

распределение, равновесное при наличии внешних сил a.

Далее, то обстоятельство, что (8) является равновесным распределением при $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, приводит к дополнительному соотношению

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\mathbf{a}, -\mathbf{g})(a_{\alpha_1} - g_{\alpha_1})\ldots(a_{\alpha_m} - g_{\alpha_m}) = 0 \tag{9}$$

(см. Приложение).

Обозначим $x_k=a_k$ при $k=1, ..., r$ и $x_k=-g_{k-r}$ при $k=r+1, ..., 2r$. Тогда (7), (9) можно записать:

$$\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\varepsilon \mathbf{x})(-\varepsilon_{\alpha_1})\ldots(-\varepsilon_{\alpha_n})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^m}{m!}\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n k_1\ldots k_m}(\mathbf{x})x_{k_1}\ldots x_{k_m}; \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta^m}{m!}\varkappa_{k_1\ldots k_m}(\mathbf{x})x_{k_1}\ldots x_{k_m}=0, \quad (11)$$

где $\varepsilon_k=\varepsilon_{k-r}$ при $k>r$; k_1, k_2, ... пробегают значения 1, ..., $2r$; $\varkappa_{\ldots\alpha+r\ldots}=\varkappa_{\ldots\alpha\ldots}$. Умножим (10) на $u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_n}/n!$, просуммируем по $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ от 1 до r, а затем просуммируем по n от 1 до ∞. Получим

$$D(-\varepsilon \mathbf{u}, \varepsilon \mathbf{x})=e^{\beta \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}}D(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \quad (12)$$

где

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_n}\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}=\sum_{k=1}^{2r}x_k\frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Обозначая

$$\begin{aligned}D_\theta^{\pm}(\mathbf{u}, \mathbf{x})=(1/4)\{[D(\mathbf{u}, \mathbf{x})+\theta D(-\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{x})]\pm\\ \pm[D(\mathbf{u}, \varepsilon \mathbf{x})+\theta D(-\varepsilon \mathbf{u}, \varepsilon \mathbf{x})]\}\quad (\theta=\pm),\end{aligned} \quad (14)$$

имеем

$$\begin{aligned}D(\mathbf{u}, \mathbf{x})=D_+^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_-^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_+^-(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_-^-(\mathbf{u}, \mathbf{x});\\ D(-\varepsilon \mathbf{u}, \varepsilon \mathbf{x})=D_+^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})-D_-^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})-D_+^-(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_-^-(\mathbf{u}, \mathbf{x}).\end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и разрешая получающееся равенство относительно $D_-^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_+^-(\mathbf{u}, \mathbf{x})$, нетрудно найти

$$D_-^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_+^-(\mathbf{u}, \mathbf{x})=-\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\beta \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)[D_+^+(\mathbf{u}, \mathbf{x})+D_-^-(\mathbf{u}, \mathbf{x})]. \quad (16)$$

Используя разложение

$$\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{2\nu+1}z^{2\nu+1}=\frac{1}{2}z-\frac{1}{24}z^3+\ldots$$

и приравнивая в (16) члены одинакового порядка по u при учете (13), (14) получаем

$$\varkappa^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{x})=-\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{2\nu+1}\beta^{2\nu+1}\varkappa^{\gamma(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n k_1\ldots k_{2\nu+1}}(\mathbf{x})x_{k_1}\ldots x_{k_{2\nu+1}}, \quad (17)$$

если среди $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ имеется нечетное число четных по времени индексов (т. е. если $(-\varepsilon_{\alpha_1})\ldots(-\varepsilon_{\alpha_n})=-1$). Здесь $\gamma(k)=\varepsilon_{k_1}\ldots\varepsilon_{k_{2\nu+1}}$. Аналогично из (16) имеем

$$\varkappa^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{x}) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,\beta^{2\nu+1}\,\varkappa^{-\gamma(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n k_1\ldots k_{2\nu+1}}(\mathbf{x})\,x_{k_1}\ldots x_{k_{2\nu+1}}, \tag{18}$$

если число четных по времени индексов четно (если $(-\varepsilon_{\alpha_1})\ldots(-\varepsilon_{\alpha_n})=1$).

Из (11), как показано в Приложении, можно получить

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,\beta^{2\nu+1}\,\varkappa^{-\gamma(k)}_{k_1\ldots k_{2\nu+1}}\,\mathbf{x}x_{k_1}\ldots x_{k_{2\nu+1}}=0, \tag{19}$$

где, как и раньше, $\gamma(k)=\varepsilon_{k_1}\ldots\varepsilon_{k_{2\nu+1}}$.

Полученные равенства будут применены для вывода основных соотношений.

§ 2. Двухиндексные и трехиндексные соотношения. 1. Пусть все параметры A_α четны по времени. Тогда, как видно из (14), будем иметь

$$D^{+}_{\theta}=D_\theta;\ D^{-}_{\theta}=0;\ \varkappa^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{x})=\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{x}).$$

При этом равенства (17) примут вид [6]

$$\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_{2l-1}}(\mathbf{x}) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,\beta^{2\nu+1}\,\varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_{2l+2\nu}}(\mathbf{x})\,x_{\alpha_{2l}}\ldots x_{\alpha_{2l+2\nu}}. \tag{20}$$

Положим $l=1$ в (20) и продифференцируем это равенство по x_β, $\beta=1,\ldots,r$ в точке $x_{\alpha+r}+x_\alpha=0$, $\alpha=1,\ldots,r$ (т. е. в точке $\mathbf{g}=\mathbf{a}$). Получим

$$\varkappa_{\alpha,\beta}=-(1/2)\,\varkappa_{\alpha\beta}\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{21}$$

Дифференцирование же по $x_{r+\beta}$, $\beta=1,\ldots,r$ дает

$$\varkappa_{\alpha,\,r+\beta}=-(1/2)\,\varkappa_{\alpha\beta}\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22), имеем

$$\varkappa_{\alpha,\,r+\beta}=\varkappa_{\alpha,\beta}\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{23}$$

2. Положим $l=2$ в (20). Дифференцирование по x_β, x_γ дает

$$\varkappa_{\alpha,\beta,\gamma}=-(\beta/2)\,(\varkappa_{\alpha\beta,\gamma}+\varkappa_{\alpha\gamma,\beta})\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{24}$$

Дифференцируя же по x_β, $x_{r+\gamma}$, получим

$$\varkappa_{\alpha,\beta\bar{\gamma}}=-(\beta/2)\,\varkappa_{\alpha\beta,\bar{\gamma}}+\varkappa_{\alpha\gamma,\beta})\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{25}$$

Здесь и в дальнейшем пользуемся обозначением $\bar{\gamma}=r+\gamma$. Наконец, дифференцирование по $x_{r+\beta}$, $x_{r+}{}^{\gamma}$ дает

$$\varkappa_{\alpha,\bar{\beta}\bar{\gamma}}=-(\beta/2)\,(\varkappa_{\alpha\beta,\bar{\gamma}}+\varkappa_{\alpha\gamma,\bar{\beta}})\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{26}$$

Вычитая (24) из (25), имеем

$$\Delta_{\alpha,\beta\bar{\gamma}}=-(\beta/2)\,\Delta_{\alpha\beta,\bar{\gamma}}\ \text{при}\ \mathbf{a}=\mathbf{g}. \tag{27}$$

Здесь и в дальнейшем обозначаем

$$\Delta_{\alpha,\beta\bar{\gamma}}=\varkappa_{\alpha,\beta\bar{\gamma}}-\varkappa_{\alpha,\beta\gamma},\quad \Delta_{\alpha,\bar{\beta}\bar{\gamma}}=\varkappa_{\alpha,\bar{\beta}\bar{\gamma}}-\varkappa_{\alpha,\beta\gamma}\ \text{и т. п.} \tag{28}$$

Вычитая же (24) из (26), находим

$$\Delta_{\alpha,\bar\beta\bar\gamma} = -(\beta/2)(\Delta_{\alpha\beta,\bar\gamma} + \Delta_{\alpha\bar\gamma,\bar\beta}) \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{29}$$

Комбинируя (27) и (29), будем иметь

$$\Delta_{\alpha,\bar\beta\bar\gamma} = \Delta_{\alpha,\beta\bar\gamma} + \Delta_{\alpha\gamma,\bar\beta} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{30}$$

Последнее равенство, если учесть (28), эквивалентно

$$\varkappa_{\alpha,\bar\beta\bar\gamma} + \varkappa_{\alpha,\beta\gamma} = \varkappa_{\alpha,\beta\bar\gamma} + \varkappa_{\alpha,\bar\beta\gamma} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{31}$$

3. Пусть теперь среди A_α имеются как четные, так и нечетные по времени параметры. При этом каждое основное соотношение с n индексами $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ будет зависеть от множителя $\varepsilon_{\alpha_1} \ldots \varepsilon_{\alpha_n}$. Так, соотношение (23) будет справедливо при $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1$. Соотношение (31) будет справедливо при $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = 1$. Получим соответствующие соотношения для другого случая, когда $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -1$, а также $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = -1$.

Продифференцируем (19) сначала по четному относительно времени параметру a_i, а затем по нечетному параметру a_j, после чего положим $x_\alpha + x_{\alpha+r} = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Будем иметь

$$\varkappa_{i,j} + \varkappa_{j,i} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{32}$$

Аналогично дифференцируя по a_i, a_{j+r}, имеем

$$\varkappa_{i,j+r} + \varkappa_{j,i} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{33}$$

Взяв разность между (33) и (32), находим

$$\varkappa_{i,j+r} = \varkappa_{i,j} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g},$$

а, следовательно, и вообще

$$\varkappa_{\alpha,\beta+r} = \varkappa_{\alpha,\beta} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}, \tag{34}$$

если $\varepsilon_\alpha\ \varepsilon_\beta = -1$.

Из (23) и (34) видим, что соотношение $\varkappa_{\alpha,\beta+r} = \varkappa_{\alpha,\beta}$ справедливо всегда, вне зависимости от знака $\varepsilon_\alpha\ \varepsilon_\beta$.

4. Продифференцируем теперь (19) по нечетным относительно инверсии времени параметрам $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}$ и положим $x_\alpha + x_{\bar\alpha} = 0$. Получим

$$\varkappa_{j_1,j_2,j_3} + \varkappa_{j_2,j_1,j_3} + \varkappa_{j_3,j_1,j_2} - (\beta^2/2)\varkappa_{j_1,j_2,j_3} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{35}$$

Дифференцирование по $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{\bar j_3}$ дает

$$\varkappa_{j_1,j_2\bar j_3} + \varkappa_{j_2,j_1\bar j_3} + \varkappa_{j_3,j_1j_2} - (\beta^2/2)\varkappa_{j_1j_2j_3} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g},$$

что после вычитания (35) приводит к

$$\Delta_{j_1,j_2\bar j_3} + \Delta_{j_2,j_1\bar j_3} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{36}$$

Аналогично, дифференцируя по $a_{j_1}, a_{\bar j_2}, a_{\bar j_3}$ и вычитая (35), имеем

$$\Delta_{j_1,\bar j_2\bar j_3} + \Delta_{j_2,j_1\bar j_3} + \Delta_{j\ ,j_1\bar j_2} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{37}$$

Из (36), (37) можно заключить, что и вообще

$$\Delta_{\alpha,\beta\bar\gamma} + \Delta_{\beta,\alpha\bar\gamma} = 0,$$

$$\Delta_{\alpha,\bar\beta\bar\gamma} + \Delta_{\beta,\alpha\bar\gamma} + \Delta_{\gamma,\alpha\bar\beta} = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g},$$

если $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = -1$. Второе из этих равенств с учетом первого может быть записано в форме (30) или (31). Это означает, что соотношение

$$\varkappa_{\alpha,\bar\beta\bar\gamma} + \varkappa_{\alpha,\beta\gamma} = \varkappa_{\alpha,\beta\bar\gamma} + \varkappa_{\alpha,\bar\beta\gamma} \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{g} \tag{38}$$

справедливо всегда, вне зависимости от знака $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma$.

§ 3. Обсуждение результатов. Пусть задано уравнение (при отсутствии сил)

$$\dot A_\alpha = c_{\alpha\beta} + (1/2)\, d_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma + \ldots \tag{39}$$

(см. первое уравнение (3)). Обсудим, в какой степени при этом становится определенным уравнение с силами

$$\dot A_\alpha = \varkappa_\alpha(\mathbf{x}) = \varkappa_{\alpha,k}(\mathbf{x}^0)\, x_k + (1/2)\, \varkappa_{\alpha,k_1k_2}(\mathbf{x}^0)\, x_{k_1} x_{k_2} + \ldots \tag{40}$$

Здесь $\mathbf{x}^0$ есть точка $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Из (23), (34) следует, что первый член в (40) можно записать

$$\varkappa_{\alpha,k}(\mathbf{x}^0)\, x_k = c_{\alpha\beta}(a_\beta - g_\beta).$$

Это значит, что линейный член без сил полностью определяет соответствующий член с силами. Далее из (31), (38) следует, что

$$\varkappa_{\alpha,k_1k_2}(\mathbf{x}^0)\, x_{k_1} x_{k_2} = \{d_{\alpha\beta\gamma}(a_\beta a_\gamma - g_\beta g_\gamma) - 2\varkappa_{\alpha,\beta\bar\gamma}(a_\beta - g_\beta)\, g_\gamma\}.$$

Мы видим, что $d_{\alpha\beta\gamma}$ не полностью определяет второй член в (39). Однако в том частном случае, когда имеется лишь один ($r=1$) нечетный по времени параметр, формула (36) при $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ дает $\Delta_{1,12} = 0$, а (37) при этом дает $\Delta_{1,22} = 0$, так что член $\varkappa_{\alpha,k_1k_2}(\mathbf{x}^0)\, x_{k_1} x_{k_2}$ принимает вид $d_{111}(a_1 - g_1)^2$.

Подобным же образом могут быть найдены соотношения, затрагивающие более высокие функции $\varkappa_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\mathbf{x})$, $n > 1$.

Однако, как показал анализ, уже в четырехиндексном случае релаксационное уравнение с силами восстанавливается по релаксационному уравнению без сил лишь частично, даже в случае наличия лишь одного параметра. Поэтому соответствующих четырехиндексных формул мы здесь приводить не будем.

Приложение. Вывод равенства (2.17)

Уравнение марковского процесса при наличии внешних сил g имеет вид $\dot w(\mathbf{B} = \mathbf{R}_g w(\mathbf{B})$, где

$$\mathbf{R}_g = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial B_{\alpha_1} \ldots \partial B_{\alpha_m}} K_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(\mathbf{B}, -\mathbf{g}). \tag{41}$$

Распределение (8) при $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ является стационарным, т. е. удовлетворяет уравнению $R_g w_g = 0$. Умножим последнее равенство на $\exp\{\beta(\mathbf{a} - \mathbf{g})\,\mathbf{B}\}$ и проинтегрируем по $B_1, \ldots, B_r$. После многократного интегрирования по частям получим (9). Равенство (11) коротко можно записать так:

$$(e^{\beta \mathbf{x}\mathbf{S}} - 1)\, \varkappa(\mathbf{x}) = 0. \tag{42}$$

Здесь $\mathbf{x}\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{2r} x_k S_k$, S_k — оператор дописывания индекса k (т. е. $S_k \varkappa = \varkappa_k$).

Учитывая, что $\varkappa_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x) = \varkappa^{+}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x) + \varkappa^{-}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x)$, приводим (42) к виду

$$[\operatorname{ch}(\beta\, \mathbf{x}\mathbf{S}) - 1](\varkappa^+ + \varkappa^-) + \operatorname{sh}(\beta\, \mathbf{x}\mathbf{S})(\varkappa^+ + \varkappa^-) = 0. \tag{43}$$

Нетрудно понять, что члены, входящие в сумму

$$[\mathrm{ch}(\beta\,\mathbf{xS})-1]\,\varkappa^- = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta^{2l}}{2l!}\,\varkappa_{k_1\ldots k_{2l}}^{-\gamma(k)}(\mathbf{x})\,x_{k_1}\ldots x_{k_{2l}},$$

относятся к тому типу членов, которые входят в $D_-^+(\mathbf{u},\mathbf{x})+D_+^-(\mathbf{u},\mathbf{x})$, т. е. которые стоят в левой части равенств (17), (18). Применяя эти равенства, имеем

$$(\mathrm{ch}\,z-1)\,\varkappa^- = -\,\mathrm{th}\,(z/2)(\mathrm{ch}\,z-1)\,\varkappa^-.$$

Аналогичным же образом получаем

$$\mathrm{sh}\,z\cdot\varkappa^+ = -\,\mathrm{th}\,(z/2)\,\mathrm{sh}\,z\cdot\varkappa^+,$$

что равно $-(\mathrm{ch}z-1)\varkappa^+$ и сокращается с соответствующим членом в (43). Учитывая также, что $\mathrm{sh}\,z=\mathrm{th}(z/2)\,(\mathrm{ch}\,z+1)$ из (43), находим $\mathrm{th}(z/2)\varkappa^-=0$, что эквивалентно (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратонович Р. Л. О важнейших соотношениях нелинейной термодинамики необратимых процессов.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1967, № 4, 84—89.
2. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М., 1960, 127с.
3. Стратонович Р. Л. Флуктуационно-диссипационная термодинамика с временно-четными и временно-нечетными переменными (I).— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1970, № 5, 479—486. (II) — Там же, № 6, 699—705.
4. Стратонович Р. Л. Тепловые шумы нелинейных сопротивлений.— Изв. вузов, Радиофизика, 1970, XIII, № 10, 1512—1522.
5. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. К общей теории тепловых флуктуаций в нелинейных системах.— ЖЭТФ, 1977, 72, 238—247.
6. Стратонович Р. Л. К термодинамике нелинейных флуктуационно-диссипационных процессов.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1962, № 5, 16—29.

Поступила в редакцию
06.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 536.33:537.871

С. Н. ЛУЗГИН

ОХЛАЖДЕНИЕ ГАЗА РЕЗОНАНСНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В УСЛОВИЯХ НАСЫЩЕНИЯ

В резонансном электромагнитном поле на атом действует сила светового давления, обусловленная рассеянием на нем квантов света [1, 2]. Ханшем и Шавловым [3] впервые было обращено внимание на возможность использования этой силы для охлаждения разреженных газов. Охлаждение, имеющее место в случае, когда частота поля ω меньше частоты рабочего перехода ω_{ab}, является следствием резонанс-