ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 2

УДК 523.11

В. Г. АГАКОВ

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРНОГО МИНИМУМА МАСШТАБНОГО ФАКТОРА СОПУТСТВУЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА

В однородных изотропных космологических моделях, основанных на теории тяготения Эйнштейна, прохождение объема элемента сопутствующего пространства через регулярный конечный минимум возможно только при космической постоянной $\Lambda > 0$. Переход к анизотропной неоднородной вселенной приводит к увеличению разнообразия типов поведения сопутствующего пространства. В частности, регулярный конечный минимум становится допустимым и при $\Lambda < 0$ и $\Lambda = 0$ [1, 2]. Как известно, анизотропия деформации пространства препятствует, а гравитационно-инерциальное силовое поле при определенных условиях и вращение способствуют появлению регулярного минимума [1, 2]. Ниже рассматривается поведение объема элемента сопутствующего пространства, заполненного баротропной средой, лишенной потоков энергии, и приводятся необходимые условия, при которых может иметь место регулярный конечный минимум масштабного фактора сопутствующего пространства.

Вместо изменения объема V элемента среды будем рассматривать изменение величины $R = (V/V_0)^{1/3}$, где $V_0 > 0$, $\frac{\partial V_0}{\partial t} = 0$. Как обычно, будем предполагать равенство нулю первой вязкости при отсутствии анизотропии деформации пространства. Законы сохранения энергии-импульса и некоторые из уравнений Эйнштейна, записанные в хронометрически инвариантной (х.и.) форме, с учетом отсутствия потоков энергии в сопутствующей системе отсчета (с.о.) приобретают вид [1]:

$$
{}^*\dot{\rho} + 3\,\frac{{}^*\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}\,\beta_{jl}\,\Pi^{jl}, \tag{1}
$$

$$
\frac{{}^*\partial p}{\partial x^i} - F_i\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \left({}^*\nabla_j - \frac{1}{c^2}\,F_j\right)\beta_i^{\cdot j}, \tag{2}
$$

$$
\frac{3}{c^2}\,\frac{{}^*\ddot{R}}{R} + \frac{3}{2}\,\frac{Q}{c^2 R} = -\frac{\varkappa}{2}\left(\rho + 3\,\frac{p}{c^2}\right) + \Lambda, \tag{3}
$$

$$
\frac{3}{c^2}\,\frac{{}^*\dot{R}^2}{R^2} + 3\,\frac{S}{c^2 R^2} = \varkappa\rho + \Lambda, \tag{4}
$$

$$
\frac{4}{3}\,\frac{{}^*\partial D}{\partial x^i} - {}^*\nabla_j\,(\Pi_i^j + A_i^{\cdot j}) + \frac{2}{c^2}\,F_j A_i^{\cdot j} = 0. \tag{5}
$$

Здесь ρ — х.и. плотность массы, p — истинное давление, F_i — х.и. вектор гравитационно-инерциальной силы, A_{ik} — х.и. тензор угловой скорости вращения, D_{ik} — х.и. тензор скоростей деформации, $D = D_i^i$, $\Pi_{ik} = D_{ik} - D h_{ik}/3$,

$$
Q = (2R/3)\,(\Pi_{ik}\Pi^{ik} - A_{ik}A^{ik} + {}^*\nabla_j F^j - F_j F^j/c^2,
$$

$$
{}^*\dot{S} = {}^*\dot{R}Q + \varkappa R^2 \beta_{jl}\,\Pi^{jl}/3,
$$

h_{ik} — х.и. метрический тензор, $^*\nabla_i$ — символ х.и. ковариантной производной, α_{ik} — вязкий тензор напряжений, его анизотропная часть равна $\beta_{ik}=\alpha_{ik}-ah_{ik}/3$, $a=\alpha_i^i$. Вязкость, характеризуемую тензором β_{ik} и скаляром α, можно рассматривать как первую и вторую вязкость. Х.и. операторы дифференцирования будем отмечать звездочками, точка означает дифференцирование по t^*.

Утверждение 1. Объем элемента пространства вращающейся с.о., сопутствующей невязкой ($\beta_{ik}=0$) баротропной среде, лишенной потоков энергии, не меняется с течением времени при выполнении одного из условий:

$$1)\ \rho\neq 0,\ \frac{^*\partial\rho}{\partial x^i}=0, \tag{6}$$

$$2)\ p\neq 0,\ \frac{^*\partial F_i}{\partial x^k}-\frac{^*\partial F_k}{\partial x^i}=0. \tag{7}$$

Доказательство основано на применении коммутационного соотношения

$$\frac{^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{^*\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^i}=\frac{2A_{ik}}{c^2}\,\frac{^*\partial}{\partial t} \tag{8}$$

к величинам ρ и p при учете (1), (2), (6), (7).

Утверждение 2. Объем элемента пространства вращающейся с.о., сопутствующей среде с давлением $p=a\rho c^2$ ($a\neq 0$ — постоянная), лишенной потоков энергии, не проходит ни через регулярный конечный минимум ($R\neq 0$, $^*\dot R=0, {}^*\ddot R\geqslant 0$), ни через регулярный максимум ($^*\dot R=0$, $^*\ddot R\leqslant 0$), если нет анизотропии деформации ($\Pi_{ik}=0$), а величины F_i отличны от нуля и вместе со своими производными любого порядка по R конечны при всех значениях $R\neq 0$.

Утверждение доказывается от противного. Из (1), (2), (8), тождества

$$\frac{^*\partial A_{ik}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{^*\partial F_k}{\partial x^i}-\frac{^*\partial F_i}{\partial x^k}\right)=0, \tag{9}$$

коммутационного соотношения

$$\frac{^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial t}-\frac{^*\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}=\frac{F_i}{c^2}\,\frac{^*\partial}{\partial t} \tag{10}$$

немедленно следует $A_{ik}\sim R^{3a}$,

$$\frac{^*\partial D}{\partial x^i}=\frac{D}{c^2}\left(F_i-\frac{R}{3a}\,\frac{\partial F_i}{\partial R}\right). \tag{11}$$

Уравнение (5) при учете $\Pi_{ik}=0$ и соотношения (11) приобретает вид

$$\frac{4}{c^2}\left(F_i-\frac{R}{3a}\,\frac{\partial F_i}{\partial R}\right)^*\dot R=\alpha_i R^{3a-1}+\frac{1-9a}{3ac^2}\,\sigma_i^{\cdot j}F_j R^{3a-1}, \tag{12}$$

где α_i, $\sigma_i^{\cdot j}$ — некоторые функции пространственных координат.

Предположив существование регулярного конечного минимума или регулярного максимума и бесконечное число раз х.и. дифференцируя

---

* Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3; фундаментальную скорость обозначим через c, эйнштейновскую гравитационную постоянную — через $\varkappa$.

по t соотношение (12), при условиях утверждения получим равенства $\alpha_i=0$, $F_i=f_i R^{3a}$, $^*\dot{f}_i=0$. Тогда из (8), (11) немедленно следует $3^*\dot{R}=DR$, где $^*\dot{D}=0$; если $D=0$, имеем стационарный случай, если $D\neq 0$, то $^*\dot{R}$ не может обратиться в ноль при $R\neq 0$.

Утверждение 3. Объем элемента пространства вращающейся с.о., сопутствующей пылевидной среде, лишенной потоков энергии не меняется с течением времени, если нет анизотропии деформации.

Из (1), (2) при $p=0$, $\rho\neq 0$ следует $\rho=\rho_0 R^{-3}$, $F_i=0$; при $\Pi_{ik}=0$ величины $h_{ik}=\mu_{ik}R^2$; из (9) с учетом $F_i=0$, $\Pi_{ik}=0$ следует $A_{ik}A^{ik}=2wR^{-4}$. Тогда уравнения (4), (5) приобретают вид

$$\frac{^*\dot{R}}{R}=\left(\frac{\varkappa\rho_0 c^2}{R^3}-\frac{S_0}{R^2}-\frac{2w^2}{3c^2R^4}+\frac{\Lambda c^2}{3}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

$$\left(\frac{8w^2}{3c^2R^5}+\frac{2S_0}{R^3}-\frac{3\varkappa\rho_0 c^2}{R^4}\right)\frac{^*\partial R}{\partial x^i}+\left(\frac{\varkappa c^2}{R^3}\frac{\partial\rho_0}{\partial x^i}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R^2}\frac{\partial S_0}{\partial x^i}-\frac{2}{3c^2R^4}\frac{\partial w^2}{\partial x^i}\right)=\frac{^*\dot{R}}{2R^3}\frac{\mu_{ei}}{V_0}\frac{\partial}{\partial x^j}(A_{mn}\mu^{ml}\mu^{nj}V_0)+$$
$$+\frac{^*\dot{R}}{2R^4}(A_{li}\mu^{ml})\frac{^*\partial R}{\partial x^m}. \tag{14}$$

Здесь ρ_0, w, S_0, μ_{ik} — функции от пространственных координат. Легко можно показать, что при $^*\dot{R}\neq 0$ выражение

$$\sqrt{A}=(\varkappa\rho_0c^2/R^3-S_0/R^2-2w^2/(3c^2R^4)+\Lambda c^2/3)^{1/2}$$

нельзя представить в виде рациональной дроби, как отношение многочленов от R.

Решая уравнения (14) как систему алгебраических уравнений относительно $^*\partial R/\partial x^i$, находим

$$\frac{^*\partial R}{\partial x^i}=a_i(R)+\sqrt{A}\,b_i(R), \tag{15}$$

где $a_i(R)$, $b_i(R)$ — рациональные дроби от R. Х.и. дифференцируя по x^i выражение $^*\dot{R}=\sqrt{A}\,R$, получим

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{^*\partial R}{\partial x^i}\right)=\frac{^*\partial R}{\partial x^i}\left(\frac{4w^2}{3c^2R^5}-\frac{\varkappa\rho_0c^2}{R^4}+\frac{2\Lambda c^2}{3R}\right)\frac{1}{2A}+$$
$$+\frac{1}{2A}\left(\frac{\varkappa c^2}{R^3}\frac{\partial\rho_0}{\partial x^i}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial S_0}{\partial x^i}-\frac{2}{3c^2R^4}\frac{\partial w^2}{\partial x^i}\right). \tag{16}$$

Подставляя выражение для $\dfrac{^*\partial R}{\partial x^i}$ из (15) в (16), с учетом того, что при $^*\dot{R}\neq 0$ $\sqrt{A}$ нельзя представить в виде рациональной дроби от R, получим $b_i=0$; тогда, применив (8) к R при учете равенства $\dfrac{^*\partial R}{\partial x^i}=a_i(R)$, убеждаемся, что $^*\dot{R}=0$, что и требовалось доказать.

Если $F_i=0$ (это достигается в непустых моделях с $\beta_{ik}=0$, $q_i=0$, при $p=0$ или $p\neq 0$, но $\dfrac{^*\partial p}{\partial x^i}=0$) и нет вращения, то при $\Lambda\leqslant 0$ регулярный минимум невозможен, ибо нет факторов, способствующих его появлению.

Утверждение 4. Объем элемента пространства невращающейся с.о., сопутствующей среде с давлением $p=a\rho c^2$ $\left(0<a\text{ — постоянная, } \frac{\partial p}{\partial x^i}\neq 0\right)$, лишенной потоков энергии, не меняется с течением времени, если нет анизотропии деформации.

При выполнении условий утверждения из (5), (11) следует $F_i=f_iR^{3a}$, где $\frac{\partial f_i}{\partial t}=0$. Для сокращения вычислений выберем пространственные сечения, всюду ортогональные к линиям времени нашей с.о. Тогда

$$^*\nabla_j F^j=\gamma R^{3a-2}-\frac{3a+1}{3ac^2}(f_if^i)R^{6a-2},\quad {}^*\dot\gamma=0,$$

$$S=\frac{2\gamma}{9a}R^3-\frac{6a+1}{27a^2c^2}(f_if^i)R^{6a}+S_0,\quad {}^*\dot S_0=0, \tag{17}$$

$$\frac{^*\partial R}{\partial x^i}=-\frac{f_i}{3ac^2}R^{3a+1}+\frac{R}{3(a+1)}\frac{\partial\ln\rho_0}{\partial x^i},\quad {}^*\dot\rho_0=0. \tag{18}$$

Уравнение (4) при учете (17) приобретает вид

$$\frac{^*\dot R}{R}=-\frac{2\gamma}{9a}R^{3a-2}+\frac{6a+1}{27a^2c^2}(f_if^i)R^{6a-2}-\frac{S_0}{R}+\frac{c^2\Lambda}{3}+\frac{c^2\varkappa\rho_0}{3}R^{-3(a+1)}. \tag{19}$$

При нашем выборе временной координаты из (5) следует $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{^*\partial\ln R}{\partial t}\right)=0$. Дифференцируя (19) по x^i при учете (18), убеждаемся, что выполнение равенства возможно только при $^*\dot R=0$, что и требовалось доказать.

На основании утверждений 2—4 можно сформулировать необходимые условия для регулярного конечного минимума: для того чтобы было возможно прохождение нестационарного объема элемента пространства с.о. (сопутствующей среде с $p=a\rho c^2$, без потоков энергии, $a=\mathrm{const}$) через регулярный конечный минимум при $\Lambda\leqslant 0$, необходимо наличие хотя бы двух из трех факторов анизотропии F_i, A_{ik}, Π_{ik} (т. е. необходимо наличие факторов F_i, Π_{ik}, или A_{ik}, Π_{ik}, или F_i, A_{ik}, Π_{ik}), причем одним из этих факторов должна быть анизотропия деформации пространства — фактор, препятствующий возникновению регулярного минимума, но, вообще говоря, не уничтожающий его. Если $\Lambda>0$, регулярный минимум возможен также при равенстве нулю всех трех факторов анизотропии F_i, A_{ik}, Π_{ik}, но, если отличен от нуля хотя бы один из факторов анизотропии F_i, A_{ik}, то для возникновения конечного регулярного минимума необходимо наличие анизотропии деформации пространства.

Автор глубоко благодарен А. Л. Зельманову за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной. В сб.: Тр. 6-го сов. по вопросам космогонии. М., 1957; Изд. АН СССР, М., 1959, с. 144—173.
2. Зельманов А. Л. К вопросу о деформации сопутствующего пространства в теории тяготения Эйнштейна.— ДАН СССР, 1960, **135**, № 6, 1367—1370.

Поступила в редакцию
26.05.78