УДК 530.145.1

Н. П. КЛЕПИКОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ И ВЕРОЯТНОСТЯМИ ПЕРЕХОДОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

При изложении квантовой теории поля и теории рассеяния частиц возникает проблема объяснения связи между матричными элементами оператора рассеяния $S(t, t_0)$, преобразующего вектор состояния системы в представлении взаимодействия от момента времени t_0 к моменту t, и вероятностью переходов из начального состояния i в конечное состояние f. Многие авторы (см., например [1—7]) записывают эту вероятность в виде

$$P_{if} = |S_{if}(\infty, -\infty)|^2. \tag{1}$$

Поскольку используемый элемент S-матрицы имеет структуру

$$S_{if}(\infty, -\infty) = M_{if}\delta(\Sigma p_f - \Sigma p_i), \tag{2}$$

где p — четырехмерные импульсы частиц, а M_{if} не обращается в нуль при $\Sigma p_f = \Sigma p_i$, при возведении этого элемента в квадрат появляется лишняя четырехмерная δ-функция, делающая невозможным интегрирование вероятности P по импульсным переменным конечных состояний. Если трехмерный импульс в силу присутствия внешнего поля не сохраняется, все же появляется квадрат одномерной δ-функции от разности сумм начальных и конечных энергий частиц, порождающий ту же трудность.

Чтобы избавиться от лишней δ-функции, авторы упомянутых книг прибегают к различным обходным путям изложения, далеким от строгости и последовательности *.

В [1—4] лишнюю четырехмерную δ-функцию представляют в виде $TV/(2\pi)^4$, где период T и объем области V временно считают конечными, сохраняя в то же время первую δ-функцию, полученную при интегрировании по бесконечному периоду T и бесконечному объему V. Деление вероятности P на TV тогда приводит к вероятности, отнесенной к единице времени и единице объема:

$$W_{if} = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{if}|^2\delta(\Sigma p_f - \Sigma p_i). \tag{3}$$

* Ситуация напоминает ту, которая долгое время существовала при изложении теории потенциала. Действительно, при проверке того, что потенциал $\varphi(\mathbf{r}) = \int f(r')dr'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi f(\mathbf{r})$, производилось дифференцирование потенциала по компонентам вектора $\mathbf{r}$ под знаком интеграла и доказывалось, что результат дифференцирования не зависит от объема области интегрирования, вследствие чего можно было перейти к пределу, когда этот объем стремится к нулю, и вынести функцию f в точке $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$ из-под знака интеграла. Между тем то, что функция $1/r$ есть функция Грина оператора Лапласа, доказывается непосредственно, если записать ее в виде $1/|r|$, представить оператор Лапласа в сферических координатах и учесть равенства $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x)$ и $\delta(r)/2\pi r^2 = \delta(\mathbf{r})$.

Такая процедура неубедительна. Интегрируемость выражения (1) по конечным состояниям появляется только после его деления на TV. Это показывает, что (1) нельзя называть вероятностью перехода. Наконец, наблюдателя интересует вовсе не число переходов, которые произойдут к моменту $t=\infty$, а число переходов за единицу времени в момент t, определяемое, согласно требованию причинности, взаимодействием только в прошлом, но никак не в будущем. Поэтому иное обоснование того же результата (3) с помощью вычисления $S_{if}(t, -t)$ и предельного перехода при $t\to\infty$, упомянутое в [4], также не является последовательным. Вывод (3) с помощью вычисления интеграла от выражения (1) по распределению частиц в волновом пакете, изложенный в [8], имеет явно нерелятивистский вид и неприменим к явлениям распада частиц или превращениям одних частиц в другие во внешнем поле, где вероятность превращения имеет смысл и наблюдаема, а параметр удара и сечение процесса определить нельзя [9]. В аналогичном выводе в [5] непоследовательность заключается в том, что поперечный размер падающего пакета считается конечным, но интегрирование ведется по его бесконечному поперечному сечению. Авторы книг [5—7] стараются создать впечатление, что вывод соотношения (3) невозможен без последовательного рассмотрения ограниченных волновых пакетов для падающих частиц, хотя в процессе расчета они фактически избавляются от этих пакетов, устремляя их импульсную ширину к нулю. Непоследовательность изложения в книге [6] видна, например, также из того, что δ-функцию, выражающую закон сохранения энергии, авторы получают как предельное значение при $t\to\infty$ выражения, которое они характеризуют как не зависящее от времени (формулы (91) и (92) в гл. 3). В целом положение с обоснованием выражения (3) представляется неудовлетворительным. Поэтому целесообразно вывести (3) непосредственно, притом в явно ковариантном виде.

Известно, что в квантовомеханической теории возмущений при действии возмущения, периодического во времени, вероятность перехода, отнесенная к единице времени, вычисляется как производная по времени в момент t от квадрата модуля амплитуды перехода. Различие между подходами разных авторов возникает лишь в связи с различным выбором произвольной постоянной, определяемой начальным моментом t_0. Так, много лет назад А. А. Соколов обратил внимание автора на то, что

$$\frac{d}{dt}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega\tau}\,d\tau\right|^2 = 2\pi\delta(\omega) \tag{4}$$

без всякого предельного перехода по t (выражение (4) от времени не зависит), хотя в более ранней книге [10] он применял аналогичное выражение, но с $t_0=0$ и предельным переходом при $t\to\infty$. Разумеется, предельный переход к бесконечно удаленному прошлому в нижнем пределе в (4) имеет смысл только тогда, когда частицы начального состояния стабильны; для частиц с периодом полураспада Δt энергия сохраняется в реакции лишь с точностью до величины $\hbar/\Delta t$. В [2] в главе 11 (формальная теория рассеяния) используется определение

$$W_{if} = \frac{d}{dt}\,|(\Phi_f, S(t, -\infty)\Phi_i)|^2, \tag{5}$$

тогда как в главах 13—14, посвященных теории поля, где нужно учитывать сохранение импульса, используются соотношения, не отличающиеся от (1)—(3).

Легко видеть, что определение (5) может быть обобщено на теорию поля:

$$W_{if} = \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} |(\Phi_f, S(\sigma, \sigma_{-\infty})\Phi_i)|^2, \tag{6}$$

где $S(\sigma, \sigma_{-\infty})$ есть решение уравнения Томонага — Швингера

$$i\frac{\delta S(\sigma, \sigma_0)}{\delta\sigma(x)} = H(x) S(\sigma, \sigma_0) \tag{7}$$

($H(x)$ — оператор взаимодействия), обращающееся в единицу, когда пространственно-подобная поверхность σ удаляется в бесконечное прошлое.

Рассмотрим сначала наиболее важный случай, когда поверхность σ является плоской и перпендикулярной оси времени в данной лоренцевой системе отсчета, т. е. трехмерным пространством в один момент времени.

Покажем, как определение (6) приводит к соотношению (3). Для этого напомним, что при вычислении матричных элементов оператора $S(t, t_0)$, соответствующих при решении уравнения (7) с помощью теории возмущений определенным диаграммам Фейнмана с n узлами, произведение начальных волновых функций, функций распространения и конечных волновых функций интегрируется по $4n$ координатам узлов в пределах (для каждого узла) четырехмерного слоя между трехмерными поверхностями, соответствующими моментам t_0 и t. Положим $t_0 = -\infty$. Множитель $1/n!$ мы полагаем обычным образом компенсированным наличием $n!$ эквивалентных диаграмм. Поскольку функции распространения зависят только от разностей координат узлов, сдвигом временных переменных многократный интеграл для каждой диаграммы сводится к произведению n интегралов, взятых по всему трехмерному пространству и по времени в пределах от $-\infty$ до 0, и множителя $\exp[it(\Sigma E_f - \Sigma E_i)]$. Интегрирование по пространственным координатам обычным образом дает трехмерные δ-функции от разностей импульсов частиц, входящих в каждый узел и выходящих из него, в силу чего снимается интегрирование по импульсам виртуальных частиц, внесенное фурье-преобразованиями функций распространения, кроме интегрирования по одному трехмерному импульсу для каждой замкнутой петли диаграммы; общим множителем выходит $\delta(\Sigma\mathbf{p}_f - \Sigma\mathbf{p}_i)$. Интегрирование по времени дает для каждого узла множитель $1/i(\Delta E - i\eta)$, $\eta \to 0$, где ΔE есть разность энергий частиц, входящих в узел и выходящих из него, причем энергия каждой виртуальной частицы входит в два таких множителя с противоположными знаками. Остается вычислить интегралы в бесконечных пределах по энергиям виртуальных частиц, внесенные фурье-преобразованиями функций распространения, учитывая, что каждая функция распространения приводит к знаменателю, имеющему два нуля, один из которых лежит в верхней, а другой — в нижней полуплоскостях комплексных энергий. Поэтому на комплексной плоскости каждой виртуальной энергии имеются 4 полюса, два из которых лежат выше действительной оси и два — ниже. Интеграл по каждой виртуальной энергии, кроме энергий в замкнутых петлях, находится путем вычисления вычетов в двух полюсах на одной из полуплоскостей. Если учитывать только полюса, где $\Delta E - i\eta = 0$, то получаются, как легко проверить, выражения, которые при выполнении закона сохранения энергии превращаются в обычные матричные элементы, содержащие фурье-образы функций распространения (для этих членов вычисление вычетов дает тот же результат, что и применение обычных δ-функций). Учет полюсов функций распространения дает дополнительные члены, отличные от нуля в матричном элементе, но не дающие, однако, вклада в вероятности переходов. Следует также учитывать, что обычные члены могут быть записаны в различных формах, отличающихся на выражения, исчезающие на массовой поверхности.

Для диаграмм, не содержащих замкнутых петель, число узлов, порождающих при интегрировании по времени знаменатели $\Delta E - i\eta$, превышает на единицу число энергий виртуальных частиц, на комплексных плоскостях которых берутся вычеты. Для диаграмм с петлями то же соотношение получается, если исключить энергии в петлях. Поэтому для любой диаграммы после нахождения всех вычетов (если отложить интегрирование в петлях) остается один множитель, имеющий вид

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{i(\Sigma E_f-\Sigma E_i-i\eta)}=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\Sigma E_f-\Sigma E_i)+\frac{1}{i(\Sigma E_f-\Sigma E_i)}\right]. \qquad (8)$$

Коэффициент $1/2\pi$ выделен с таким расчетом, чтобы не менять определения матричного элемента на массовой поверхности M_{if}.

Вариационная производная от четырехмерного интеграла, взятого до поверхности σ, по этой поверхности в точке x равна подынтегральной функции в этой точке. Это может быть также записано в виде

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}e^{i(\Sigma E_f-\Sigma E_i)t}\left[\pi\delta(\Sigma E_f-\Sigma E_i)+\frac{1}{i(\Sigma E_f-\Sigma E_i)}\right]\frac{\delta(\Sigma\mathbf{p}_f-\Sigma\mathbf{p}_i)}{2\pi}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\exp\left[i(\Sigma E_f-\Sigma E_i)t-i(\Sigma\mathbf{p}_f-\Sigma\mathbf{p}_i)\mathbf{r}\right]. \qquad (9)$$

При подстановке матричных элементов $S_{if}(\sigma, \sigma_{-\infty})$ и их производных, вычисленных с помощью (9), в правую часть (6) члены с разностью сумм начальных и конечных энергий сокращаются за счет комплексного сопряжения, а члены с δ-функциями от этой разности складываются, давая общий множитель $\delta(\Sigma E_f - \Sigma E_i)$, вследствие чего матричные элементы приводятся к массовой поверхности. Экспоненты, содержащие время, сокращаются, экспонента, содержащая $\mathbf{r}$, обращается в единицу при умножении на $\delta(\Sigma\mathbf{p}_f - \Sigma\mathbf{p}_i)$, и мы получаем (3). Вариационная производная от квадрата модуля матричного элемента, отличного от нуля также вне массовой поверхности и зависящего от времени, оказывается отличной от нуля только на массовой поверхности и не зависящей от времени. В силу этого, если требуется вычислить только вероятности переходов, можно пользоваться соотношением (3), где M_{if} обычным образом находятся из (2). Если же представляет интерес амплитуда реакции, применимая также вне массовой поверхности, можно воспользоваться величинами $(\Phi_f, S(\sigma, \sigma_{-\infty})\Phi_i)$.

Поясним сказанное на примере расчета одной из диаграмм электромагнитного взаимодействия двух электронов, один из которых меняет четырехмерный импульс с p_1 на p_3, а другой — с p_2 на p_4:

$$S_{if}(\sigma,\sigma_{-\infty})=e^2\int\limits_{-\infty}^{\sigma}d^4y\int\limits_{-\infty}^{\sigma}d^4z e^{i(p_1-p_3)y+i(p_2-p_4)z}D^c(y-z)(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)=$$
$$=ie^2(2\pi)^2\delta(\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)e^{i(E_3+E_4-E_1-E_2)t}(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)\times$$
$$\times(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{(\omega-k_0-i\eta)(\omega+k_0-i\eta)(E_4-E_2+k_0-i\eta')(E_3-E_1-k_0-i\eta')}=$$

$$= ie^2 (2\pi)^4 \delta(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \left[\pi\delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i(E_3 + E_4 - E_1 - E_2)} \right] \frac{1 + (E_3 + E_4 - E_1 - E_2)/2\omega}{(E_4 - E_2 + \omega)(E_1 - E_3 - \omega)} \times$$

$$\times e^{i(E_3+E_4-E_1-E_2)t} (\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2), \qquad (10)$$

где $\omega = \sqrt{(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2} = \sqrt{(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2)^2}$. Добавляя обменную диаграмму и учитывая (9), с помощью определения (6) находим

$$W_{if} = (2\pi)^4 \sigma(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \left| \frac{(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)}{(E_4 - E_2)^2 - (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\bar{u}_4\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu u_2)}{(E_3 - E_2)^2 - (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)^2} \right|^2. \qquad (11)$$

Из изложенного выше видно, что переход матричного элемента на массовую поверхность без предельного перехода по времени в бесконечно удаленное будущее достигается при сложении интегралов, вычисленных по двум половинам четырехмерного пространства, в интеграл по всему пространству (аналогично сложению двух интегралов по полупрямым в интеграл по всей прямой в (4)). Проделанному выводу можно придать явно ковариантный вид, если считать поверхность σ плоской, но наклоненной под разными углами к оси времени в разных системах отсчета. И в этом случае две половины пространства, разделенные наклонной плоскостью, складываются в полное пространство, а след того, где именно проходила эта плоскость, пропадает.

Можно обобщить определение (6) на неплоские поверхности σ. В этом случае один интеграл в (6) берется до поверхности, уравнение которой имеет вид $f(a_\nu - x_\nu) = 0$, а другой — до поверхности, определяемой уравнением $f(a_\nu + x_\nu) = 0$, поверхности касаются в точке $x_\nu = 0$, и вариационная производная берется в этой точке. Результат вычисления вероятности оказывается не зависящим от выбора поверхности σ.

Изменение определения связи между матричными элементами и вероятностями переходов не затрагивает вопроса о перенормировках расходящихся матричных элементов для диаграмм с замкнутыми петлями.

Автор благодарит А. Р. Френкина за полезное обсуждение темы статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1957, с. 186.
2. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., 1963, с. 314.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1959, с. 264.
4. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория поля. Часть I. М., 1968, с. 284.
5. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М., 1975, с. 54.
6. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., 1967, с. 79.
7. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., 1969, с. 207.
8. Мессиа А. Квантовая механика, т. 1. М., 1978, с. 359—365.
9. Клепиков Н. П. Излучение фотонов и электронно-позитронных пар в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1954, 26, 19—34.
10. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля. М., 1952, с. 179.

Поступила в редакцию
30.06.78