УДК 530.145; 538.0

И. М. ТЕРНОВ, В. А. БОРДОВИЦЫН

К ОБОСНОВАНИЮ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА И СПИНА ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОЧАСТИЧНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Исследованию движения поляризованных частиц посвящена обширная литература (см. [1]). Особую актуальность эта проблема приобрела в связи с экспериментальным подтверждением эффекта самополяризации релятивистских частиц, движущихся в ускорителях и накопительных кольцах [2—7].

В практике расчетов движения спина во внешнем электромагнитном поле в последнее время стали широко применяться классические уравнения движения Баргманна — Мишеля — Телегди [8]. Эти уравнения описывают движение спина для заданного классического движения заряда. Они получаются из уравнения Дирака квазиклассическим методом в нулевом приближении по $\hbar$ [9—10]. Известен и другой чисто классический вывод этих уравнений (см., например, [11]).

В настоящей работе для вывода релятивистских уравнений движения заряда и спина используется одночастичная квантовая теория, представленная в соответствующей ковариантной форме [12].

§ 1. Операторы проектирования в одночастичной квантовой теории. Дираковская частица во внешнем электромагнитном поле описывается уравнениями

$$\bar{\psi}(i\gamma_\mu \overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu - m_0c) = 0, \quad (i\gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu + m_0c)\psi = 0. \tag{1}$$

Стрелками здесь проставлено направление действия производной в операторе импульса:

$$\overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu = \overleftarrow{p}_\mu + \frac{e}{c}A_\mu, \quad \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu = \overrightarrow{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu. \tag{2}$$

Для построения одночастичной теории проведем квадрирование уравнений (1). Тогда получим

$$\bar{\psi}(\overleftarrow{\mathscr{P}}^2_\mu + m_0^2c^2 - m_0\mu_0F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) = 0, \quad (\overrightarrow{\mathscr{P}}^2_\mu + m_0^2c^2 - m_0\mu_0F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) = 0. \tag{3}$$

В принятых обозначениях $\mu_0 = e_0\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора, $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2i$, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Заметим, что взаимодействие спина с внешним электромагнитным полем в уравнениях (3), в отличие от уравнений Дирака (1), учитывается явным образом.

Решения уравнений (3) могут удовлетворять соответственно двум парам уравнений первого порядка:

$$\bar{\psi}_+(i\gamma_\mu \overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu - m_0c) + 0, \quad (i\gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu + m_0c)\psi_+ = 0, \tag{4}$$

$$\bar{\psi}_-(i\gamma_\mu \overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu + m_0c) = 0, \quad (i\gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu - m_0c)\psi_- = 0. \tag{5}$$

Первая пара этих уравнений (4) совпадает с уравнениями Дирака, а вторая (5) отличается от них знаком перед m_0c и дает «лишние» решения. Для устранения последних введем операторы проектирования

$$\overleftarrow{\Lambda}_{\pm} = \pm \frac{i\gamma_\mu \overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu \pm m_0 c}{2m_0 c}, \quad \overrightarrow{\Lambda}_{\pm} = \mp \frac{i\gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu \mp m_0 c}{2m_0 c}. \tag{6}$$

Действие этих операторов на волновую функцию состоит в следующем:

$$\begin{gathered} \bar{\psi}_{\pm} \overleftarrow{\Lambda}_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}, \quad \overrightarrow{\Lambda}_{\pm} \psi_{\pm} = \psi_{\pm}, \\ \bar{\psi}_{\pm} \overleftarrow{\Lambda}_{\mp} = 0, \quad \overrightarrow{\Lambda}_{\pm} \psi_{\mp} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\overleftrightarrow{\Lambda}_{\pm} \overleftrightarrow{\Lambda}_{\mp} = 0, \quad \overleftrightarrow{\Lambda}_{+} + \overleftrightarrow{\Lambda}_{-} = 1, \quad \overleftrightarrow{\Lambda}^2_{\pm} = \overleftrightarrow{\Lambda}_{\pm}. \tag{8}$$

Легко видеть, что для средних значений операторов физических величин справедливо соотношение

$$\langle Q \rangle = \langle \overleftarrow{\Lambda}_{\pm} Q \overrightarrow{\Lambda}_{\pm} \rangle. \tag{9}$$

§ 2. Уравнения движения операторов физических величин. Рассмотрим четырехмерную дивергенцию *

$$\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{\psi} \gamma_\mu Q \psi = \bar{\psi} i \gamma_\mu \overleftarrow{\mathscr{P}}_\mu Q \psi + \bar{\psi} i \gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu Q \psi. \tag{10}$$

В предположении дальнейшего интегрирования по трехмерному объему это выражение с учетом (1) можно переписать в виде

$$\frac{\hbar}{ic} \frac{d}{dt} \psi^+ Q \psi = m_0 c \bar{\psi} Q \psi + \bar{\psi} i \gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu Q \psi. \tag{11}$$

Введем собственное время посредством соотношения

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\psi} Q \psi = \frac{d}{dt} \psi^+ Q \psi. \tag{12}$$

Теперь имеем

$$\begin{gathered} \bar{\psi} i \gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu Q \psi = \frac{\hbar}{ic} \frac{d}{d\tau} \bar{\psi} Q \psi - m_0 c \bar{\psi} Q \psi, \\ \bar{\psi} Q i \gamma_\mu \overrightarrow{\mathscr{P}}_\mu \psi = - m_0 c \bar{\psi} Q \psi. \end{gathered} \tag{13}$$

Второе из этих равенств является очевидным следствием уравнения Дирака.

Составляя из левых частей (13) коммутатор, получаем уравнение для средних значений операторов ** в виде (см. также [13—16])

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{ic}{\hbar} [H, Q], \tag{14}$$

где

$$H = i \gamma_\mu \mathscr{P}_\mu + m_0 c. \tag{15}$$

Составляя антикоммутатор, получаем оператор

$$\bar{Q} = -\frac{1}{2m_0 c} \{ i \gamma_\mu \mathscr{P}_\mu, Q \} = \overrightarrow{\Lambda}_{+} Q \overrightarrow{\Lambda}_{+}. \tag{16}$$

---

* Поскольку дальнейшая теория строится на волновых функциях, удовлетворяющих уравнению Дирака, индекс «+» при волновой функции опускается.

** Знак среднего опущен.

Легко показать, что

$$\overleftarrow{\Lambda}_+ Q\overrightarrow{\Lambda}_+ = \overrightarrow{\Lambda}_+ Q\overrightarrow{\Lambda}_+ + \frac{\hbar}{2im_0c^2}\frac{dQ}{d\tau} \tag{17}$$

и, следовательно,

$$\overline{Q} = Q - \frac{\hbar}{2im_0c^2}\,\frac{dQ}{d\tau}. \tag{18}$$

Найдем уравнение движения операторов $\overline{Q}$. Выполняя соответствующие действия в рамках одночастичного формализма, получаем

$$\frac{d\overline{Q}}{d\tau} = \frac{ic}{\hbar}[G, Q], \tag{19}$$

где

$$G = \frac{1}{2m_0c}\left(\mathscr{P}_\mu^2 + m_0^2c^2 - m_0\mu_0F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right). \tag{20}$$

Формулы (18)—(20) встречались ранее в работах [16].

Попробуем применить изложенную выше теорию к дираковским частицам в предположении наличия у них отличного от нуля аномального магнитного момента. В этом случае

$$H = i\gamma_\mu\mathscr{P}_\mu + m_0c - \frac{1}{4c}\mu_0(g-2)F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \tag{21}$$

Член, ответственный за взаимодействие аномального магнитного момента с внешним электромагнитным полем, приводит к нарушению свойств операторов проектирования (6), и, на первый взгляд, обобщение теории здесь невозможно. Однако заметим, что этот член пропорционален постоянной Планка $\hbar$, которая входит также в знаменатель левой части уравнений движения (19). Отсюда следует, что, ограничиваясь точностью $\hbar(g-2)$, с которой записывается аномальное взаимодействие в (21), можно пытаться решить указанную проблему. При этом всюду в промежуточных выражениях следует сохранять члены, пропорциональные $\hbar(g-2)$.

§ 3. Переход к классическим уравнениям движения. С учетом аномального магнитного момента имеем

$$G = \frac{1}{2m_0c}\left[\mathscr{P}_\mu^2 + m_0^2c^2 - \frac{1}{2}m_0\mu_0gF_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\mu_0(g-2)F_{\mu\nu}\gamma_\mu\mathscr{P}_\nu\right]. \tag{22}$$

Операторы $\overline{Q}$ будем строить на основе матриц билинейных ковариантных форм, умноженных на m_0c, т. е. положим

$$Q = (\mathrm{I}, \gamma_5, i\gamma_\mu, i\gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu})\, m_0c. \tag{23}$$

Два первых оператора представляют собой тривиальные выражения и с физической точки зрения малоинтересны. Остальные операторы суть

$$\overline{im_0c\gamma_\mu} = K_\mu, \quad \overline{im_0c\gamma_5\gamma_\mu} = T_\mu, \quad \overline{m_0c\sigma_{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \tag{24}$$

$$K_\mu = \mathscr{P}_\mu + i\gamma_\mu H + \frac{1}{2c}\mu_0(g-2)\,{}^*F_{\mu\nu}i\gamma_5\gamma_\nu,$$

$$T_\mu = S_\mu + i\gamma_5\gamma_\mu H + \frac{1}{2c}\mu_0(g-2)\,{}^*F_{\mu\nu}i\gamma_\nu,$$

$$T_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}H + \frac{1}{2c}\mu_0(g-2)\left(F_{\mu\nu} - {}^*F_{\mu\nu}i\gamma_5\right),$$

где

$$S_\mu = \frac{1}{2i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathscr{P}_\nu\sigma_{\alpha\beta}, \quad \Pi_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5\gamma_\alpha\mathscr{P}_\beta, \tag{25}$$

${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ — тензор, дуальный тензору $F_{\mu\nu}$.

С указанной выше точностью оператор K_μ на решениях уравнения Дирака совпадает с оператором импульса. Операторы T_μ и $T_{\mu\nu}$ при тех же условиях совпадают с хорошо известными векторным и тензорным операторами поляризации [17—19]

$$T_\mu = im_0c\gamma_5\gamma_\mu - \gamma_5\mathscr{P}_\mu, \quad T_{\mu\nu} = m_0c\sigma_{\mu\nu} + \gamma_\mu\mathscr{P}_\nu - \gamma_\nu\mathscr{P}_\mu. \tag{26}$$

Соотношения (25) также известны в литературе [20—21].

По формулам предыдущего параграфа найдем уравнения движения операторов K_μ, T_μ и $T_{\mu\nu}$. Отбрасывая члены, пропорциональные $\hbar(g-2)$, будем иметь

$$\frac{dK_\mu}{d\tau} = \frac{e}{m_0c}F_{\mu\nu}\mathscr{P}_\nu + \frac{e\hbar g}{8m_0c}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\sigma_{\alpha\beta},$$

$$\frac{dT_\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0c}F_{\mu\nu}T_\nu + \frac{e(g-2)}{2m_0^3c^3}\mathscr{P}_\mu F_{\alpha\beta}\mathscr{P}_\alpha T_\beta + \frac{e\hbar g}{8m_0c}\frac{\partial {}^*F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}i\sigma_{\alpha\beta}, \tag{27}$$

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0c}(F_{\mu\rho}T_{\rho\nu} - F_{\nu\rho}T_{\rho\mu}) + \frac{e(g-2)}{2m_0^3c^3}F_{\rho\sigma}(\mathscr{P}_\mu T_{\nu\rho} - \mathscr{P}_\nu T_{\mu\rho})\mathscr{P}_\sigma -$$
$$- \frac{e\hbar g}{4m_0c}i\left(\gamma_\alpha\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + i\gamma_5\gamma_\alpha\frac{\partial {}^*F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right).$$

Так как операторы K_μ, T_μ и $T_{\mu\nu}$ с точностью до членов пропорциональных $\hbar$, совпадают с операторами $\mathscr{P}_\mu$, S_μ и $\Pi_{\mu\nu}$, то в нулевом приближении по $\hbar$ вместо (27) будем иметь

$$\frac{d\mathscr{P}_\mu}{d\tau} = \frac{e}{m_0c}F_{\mu\nu}\mathscr{P}_\nu, \quad \frac{dS_\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0c}F_{\mu\nu}S_\nu + \frac{e(g-2)}{2m_0^3c^3}\mathscr{P}_\mu F_{\alpha\beta}\mathscr{P}_\alpha S_\beta, \tag{28}$$
$$\frac{d\Pi_{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0c}(F_{\mu\rho}\Pi_{\rho\nu} - F_{\nu\rho}\Pi_{\rho\mu}) + \frac{e(g-2)}{2m_0^3c^3}F_{\rho\sigma}(\mathscr{P}_\mu\Pi_{\nu\rho} - \mathscr{P}_\nu\Pi_{\mu\rho})\mathscr{P}_\rho.$$

В том же приближении по $\hbar$ справедливы соотношения (ср. (25))

$$S_\alpha = \frac{1}{2im_0c}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\Pi_{\mu\nu}\mathscr{P}_\rho, \quad \Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{im_0c}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}S_\alpha\mathscr{P}_\beta, \tag{29}$$

используя которые найдем, что векторные и тензорные уравнения движения спина взаимно переходят друг в друга (см. также [22]).

Уравнения (28) являются точными аналогами классических уравнений движения заряда и спиновых уравнений Баргманна—Мишеля—Телегди. Заметим, что операторы импульса, спина и тензор $F_{\mu\nu}$ в этих уравнениях можно переставлять местами, так как это приводит к появлению членов, пропорциональных $\hbar$ и в данном приближении несущественных.

Примечание. После написания данной работы авторы нашли, что уравнение Баргманна—Мишеля—Телегди как частный случай содержится в классической теории спина Я. И. Френкеля (Zs. Phis., 1926, **37**, с. 243). Более подробное сообщение будет опубликовано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974, 391 с.
2. Тернов И. М., Лоскутов Ю. М., Коровина Л. И. О возможности поляризации пучка электронов вследствие релятивистского излучения в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1961, 41, 1294—1295.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения.— ДАН СССР, 1963, 153, 1052—1054.
4. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. Влияние синхротронного излучения электронов на состояние ориентации их спина.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1964, № 4, 62—70.
5. Байер В. Н. Радиационная поляризация электронов в накопителях.— УФН, 1971, **105**, 441—478.
6. Le Duff J., Marin P. C., Masnou J. L., Sommer M. Measurement of beam polarisation in the Orsay colliding beam ring ACO.— Rapport Technique. Orsay, 1973, 4—73.
7. Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. Кинетика поляризации частиц в накопителях.— ЖЭТФ, 1973, **64**, 1918—1929.
8. Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. Precession of the polarisation of particles moving in a homogeneous electromagnetic field.— Phys. Rev. Lett., 1959, 2, 435—437.
9. Rafanelli K., Schiller R. Classical motion of spin-(1/2) particles.— Phys. Rev., 1964, **B 135**, 279—281.
10. Kolsrud M. Covariant and hermitian semi-classical limit of quantum dynamical equations for spin-(1/2) particles.— Nuovo Cim., 1965, **39**, 504—518.
11. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Часть I. М., 1968, с. 173—179.
12. Мэтьюс П. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. М., 1959, с. 54.
13. Saavedra I. Proper time formulation of the Dirac electron theory.— Nucl. Phys., 1966, **77**, 673—679.
14. Kolsrud M. Relativistic quantum mechanical position operator.— Phys. Norv., 1967, **2**, 149—151.
15. Kálnay A. J., Cotrina E. On proper time and localisation for the quantum relativistic electron.— Progr. Theoret. Phys., 1969, **42**, 1422—1444.
16. Yamasaki H. An extension of Feynman—Bunge—Corben's relation regarding the position-operator of Dirac electron to arbitrary operators. I. II.— Progr. Theoret. Phys., 1964, **31**, 322—325.
17. Sokolow A. A. Über das Verhalten des Spins von Dirac-Teilchen bei Streuprozessen.— Ann. d. Phys., 1961, 8, 237—259.
18. Fradkin D. M., Good R. H., Jr. Electron polarisation operators.— Rev. Mod. Phys., 1961, **33**, 343—352; Tensor operator for electron polarisation.— Nuovo Cim., 1961, **22**, 643—649.
19. Hilgevoord T., Wouthysen S. A. On the spin angular momentum of the Dirac particle.— Nucl. Phys., 1963, **40**, 1—12.
20. Bargmann V., Wigner E. P. Group theoretical discussion of relativistic wave equations.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1948, **34**, 211—225.
21. Широков Ю. М. Релятивистская теория спина.— ЖЭТФ, 1951, 21, 748—760.
22. Бордовицын В. А., Бызов Н. Н. О ковариантной форме уравнений движения заряженного магнетона.— Изв. вузов. Физика, 1977, № 10, 36—40.

Поступила в редакцию
04.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 536.421

П. Н. НИКОЛАЕВ

ОДНОЧАСТИЧНАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

Метод Н. Н. Боголюбова [1] оказался весьма плодотворным в теории статистических систем, в частности твердых тел [2]. В классической области теория кристаллического состояния с учетом коллектив-