СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974, 391 с.
2. Тернов И. М., Лоскутов Ю. М., Коровина Л. И. О возможности поляризации пучка электронов вследствие релятивистского излучения в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1961, 41, 1294—1295.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения.— ДАН СССР, 1963, 153, 1052—1054.
4. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. Влияние синхротронного излучения электронов на состояние ориентации их спина.— Вести. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1964, № 4, 62—70.
5. Байер В. Н. Радиационная поляризация электронов в накопителях.— УФН, 1971, 105, 441—478.
6. Le Duff J., Marin P. C., Masnou J. L., Sommer M. Measurement of beam polarisation in the Orsay colliding beam ring ACO.— Rapport Technique. Orsay, 1973, 4—73.
7. Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. Кинетика поляризации частиц в накопителях.— ЖЭТФ, 1973, 64, 1918—1929.
8. Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. Precession of the polarisation of particles moving in a homogeneous electromagnetic field.— Phys. Rev. Lett., 1959, 2, 435—437.
9. Rafanelli K., Schiller R. Classical motion of spin-(1/2) particles.— Phys. Rev., 1964, В 135, 279—281.
10. Kolsrud M. Covariant and hermitian semi-classical limit of quantum dynamical equations for spin-(1/2) particles.— Nuovo Cim., 1965, 39, 504—518.
11. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Часть I. М., 1968, с. 173—179.
12. Мэтьюс П. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. М., 1959, с. 54.
13. Saavedra I. Proper time formulation of the Dirac electron theory.— Nucl. Phys., 1966, 77, 673—679.
14. Kolsrud M. Relativistic quantum mechanical position operator.— Phys. Norv., 1967, 2, 149—151.
15. Kálnay A. J., Cotrina E. On proper time and localisation for the quantum relativistic electron.— Progr. Theoret. Phys., 1969, 42, 1422—1444.
16. Yamasaki H. An extension of Feynman—Bunge—Corben's relation regarding the position-operator of Dirac electron to arbitrary operators. I. II.— Progr. Theoret. Phys., 1964, 31, 322—325.
17. Sokolow A. A. Über das Verhalten des Spins von Dirac-Teilchen bei Streuprozessen.— Ann. d. Phys., 1961, 8, 237—259.
18. Fradkin D. M., Good R. H., Jr. Electron polarisation operators.— Rev. Mod. Phys., 1961, 33, 343—352; Tensor operator for electron polarisation.— Nuovo Cim., 1961, 22, 643—649.
19. Hilgevoord T., Wouthysen S. A. On the spin angular momentum of the Dirac particle.— Nucl. Phys., 1963, 40, 1—12.
20. Bargmann V., Wigner E. P. Group theoretical discussion of relativistic wave equations.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1948, 34, 211—225.
21. Широков Ю. М. Релятивистская теория спина.— ЖЭТФ, 1951, 21, 748—760.
22. Бордовицын В. А., Бызов Н. Н. О ковариантной форме уравнений движения заряженного магнетона.— Изв. вузов. Физика, 1977, № 10, 36—40.

Поступила в редакцию
04.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 536.421

Н. Н. НИКОЛАЕВ

ОДНОЧАСТИЧНАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ УЧЕТЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

Метод Н. Н. Боголюбова [1] оказался весьма плодотворным в теории статистических систем, в частности твердых тел [2]. В классической области теория кристаллического состояния с учетом коллектив-

ных колебаний построена в работах [3—7]. В квантовой области методом Н. Н. Боголюбова рассматривалась модель кристалла в приближении мультипликативности бинарной функции распределения [2]. Целью настоящей работы является получение решения для одночастичной матрицы плотности кристаллического состояния при учете корреляций. Для этого мы исходим из цепочки уравнений для матриц плотности [1, 8], которая для системы с парным взаимодействием имеет вид

$$\begin{aligned} [H_1(1), R_1(1)] + \text{Sp}_{(2)} [\Phi_{12}, R_2(1, 2)] &= 0, \\ [H_2(1, 2), R_2(1, 2)] + \text{Sp}_{(3)} [\Phi_{13} + \Phi_{23}, R_3(1, 2, 3)] &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial q_1^\alpha}, \\ H_2(1, 2) &= H_1(1) + H_1(2) + \Phi_{12}, \\ \Phi_{ij} &= \Phi(|q_i - q_j|), \\ R_1(1) &= N \text{Sp}_{(2, \dots, N)} D(1, \dots, N), \\ R_2(1, 2) &= N(N-1) \text{Sp}_{(3, \dots, N)} D(1, \dots, N), \\ D &= \frac{\exp[-\beta H]}{\text{Sp}_{1, \dots, N} \exp[-\beta H]}, \\ H &= \sum_i H_1(i) + \sum_{i < j} \Phi_{ij}, \\ \beta &= 1/\theta, \quad \theta = kT. \end{aligned}$$

Условия нормировки:

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{(1)} R_1(1) &= N, \\ \text{Sp}_{(1,2)} R_2(1, 2) &= N(N-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к корреляционным матрицам плотности с помощью соотношений

$$\begin{aligned} R_2(1, 2) &= R_1(1)R_1(2) + g_2(1, 2), \\ R_3(1, 2, 3) &= R_1(1)R_1(2)R_1(3) + R_1(1)g_2(2, 3) + \\ &+ R_1(2)g_2(1, 3) + R_1(3)g_2(1, 2) + g_3(1, 2, 3), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и перепишем (1) в форме, содержащей $R_1, R_2, g_2, g_3, \dots$:

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_1(1), R_1(1)] + \text{Sp}_{(2)} [\Phi_{12}, g_2(1, 2)] &= 0, \\ [\tilde{H}_2(1, 2), R_2(1, 2)] + \text{Sp}_{(3)} [\Phi_{13} + \Phi_{23}, g_2(2, 3)R_1(1) + \dots] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ R_1(2) g_2(1, 3) + g_3(1, 2, 3) = 0,$$

.....

где

$$\tilde{H}_1(1) = H_1(1) + \text{Sp}_{(2)} \Phi_{12} R_1(2),$$

$$\tilde{H}_2(1, 2) = H_2(1, 2) + \text{Sp}_{(3)} (\Phi_{13} + \Phi_{23}) R_1(3). \quad (5)$$

Для расщепления цепочки уравнений сделаем допущение, аналогичное тому, которое сделано нами в классической области [4]: в нулевом приближении пренебрегаем членами, содержащими под знаком Sp корреляционные матрицы (Sp берется по одной из переменных матриц). Эти члены пропорциональны кубу отношения радиуса области движения атома к расстоянию между атомами, так как лишь в области движения атома можно говорить о сильно скоррелированном движении атомов, а вне этой области корреляции существенно меньше. Выход точки интегрирования за область движения соответствует разрушению сильной корреляции, которая имеет место в твердом теле.

Экспериментально [9] и теоретически [2] показано, что это отношение не превышает одной десятой, а куб отношения — одной тысячной; поэтому наше приближение достаточно точно.

Теперь в нулевом приближении имеем

$$[\tilde{H}_1(1), R_1(1)] = 0, \quad (6)$$

$$[\tilde{H}_2(1, 2), R_2(1, 2)] = 0.$$

Коммутационное соотношение для оператора гиббсовского типа

$$D = \frac{\exp[-\beta H]}{\text{Sp}_{1, \dots, N} \exp[-\beta H]}$$

и гамильтониана H имеет, очевидно, вид

$$[H, D] = 0.$$

Так как мы рассматриваем статистическую систему, то нас интересуют решения гиббсовского типа. Сравнивая (6) и последние два соотношения, имеем

$$R_1(1) = (1/Q_1) \exp[-\beta \tilde{H}_1(1)], \quad (7)$$

$$R_2(1, 2) = (1/Q_2) \exp[-\beta \tilde{H}_2(1, 2)],$$

где

$$Q_1 = \text{Sp}_{(1)} \exp[-\beta \tilde{H}_1(1)]/N, \quad (8)$$

$$Q_2 = \text{Sp}_{(1,2)} \exp[-\beta \tilde{H}_2(1, 2)]/N(N-1).$$

Для построения первого приближения удобно переписать первое уравнение (1) в виде

$$[H_1(1), R_1(1)] + \text{Sp}_{(2)} [\Phi_{12} R_2(1, 2) R_1^{-1}(1) R_1^{-1}(2) R_1(2)] R_1(1) - \\ - R_1(1) \text{Sp}_{(2)} [R_1(2) R_1^{-1}(1) R_1^{-1}(2) R_2(1, 2) \Phi_{12}] = 0, \quad (9)$$

где

$$R_1^{-1}(1) = Q_1 \exp[\beta \tilde{H}_1(1)].$$

Дальнейшее рассмотрение требует анализа (9). Для сокращения выкладок введем обозначения:

$$A = \tilde{H}_1(1) + \tilde{H}_1(2), \quad (10)$$

$$B = -[\tilde{H}_1(1) + \tilde{H}_1(2) + \Phi_{12}].$$

Коммутатор

$$C = [A, B] = -[H_1(1) + H_1(2), \Phi_{12}]. \quad (11)$$

Соответственно

$$[A, C] = -[H_1(1) + H_1(2), [H_1(1) + H_1(2), \Phi_{12}]] - \\ - [v(1), [H_1(1), \Phi_{12}]] - [v(2), [H_1(2), \Phi_{12}]], \quad (12)$$

где

$$v(1) = \text{Sp}_{(2)} \Phi_{12} R_1(2). \quad (13)$$

Оценим порядок различных членов (12):

$$[H_1(1) + H_1(2), [H_1(1) + H_1(2), \Phi_{12}]] \sim \hbar^4, \quad (14)$$

$$[v(1), [H_1(1), \Phi_{12}]] \sim [v(2), [H_1(2), \Phi_{12}]] \sim \hbar^2 (\nabla_1 \Phi_{12})^2.$$

В случае кристалла для эффективной области локализации атома выполняется соотношение

$$|\nabla_1 \Phi_{12}| \ll |\nabla_1^2 \Phi_{12}| \sigma, \quad (15)$$

где σ — параметр, который для потенциала Леннарда — Джонса определяется из соотношения

$$\Phi_{12}(r) = 0,$$

поэтому

$$[A, C] = o(C). \quad (16)$$

Аналогично имеем

$$[B, C] = o(C). \quad (17)$$

Поэтому в данном приближении мы применим теорему Глаубера (тождество Беккера — Хаусдорфа):

$$\exp[\lambda A] \exp[\lambda B] = \exp[\lambda(A + B)] \exp[(\lambda^2/2)[A, B]]. \quad (18)$$

В нашем случае

$$R_2(1, 2) R_1^{-1}(1) R_1^{-1}(2) = (Q_1^2/Q_2) \exp[-\beta \Phi_{12}] \times \\ \times \exp[-(\beta^2/2)[H_1(1) + H_1(2), \Phi_{12}]], \quad (19)$$

$$R_1^{-1}(1) R_1^{-1}(2) R_2(1, 2) = (Q_1^2/Q_2) \exp[-\beta \Phi_{12}] \times \\ \times \exp[-(\beta^2/2)[H_1(1) + H_1(2), \Phi_{12}]].$$

Если теперь здесь пренебречь членами порядка $\hbar^2$, то (19) имеет вид

$$[\tilde{H}_1, R_1(1)] = 0, \quad (20)$$

где

$$\tilde{H}_1 = H_1(1) + \text{Sp}_{(2)} K_{12} R_1(2), \quad (21)$$

$$K_{12} = \Phi_{12} \exp[-\beta \Phi_{12}] Q_1^2/Q_2$$

откуда окончательно для одночастичной матрицы плотности кристаллического состояния при учете корреляций получаем

$$R_1(1) = (1/Q_{11}) \exp[-\beta \tilde{H}_1], \quad (22)$$

$$Q_{11} = \text{Sp}_{(1)} \exp[-\beta \tilde{H}_1(1)]/N.$$

Таким образом, мы получили, что движение частицы описывается эффективным гамильтонианом $\tilde{H}_1$. Уравнение движения частицы имеет вид

$$\nabla_1^2 \Psi + (2m/\hbar^2)(E - \text{Sp}_{(2)} K_{12} R_1(2)) \Psi = 0. \quad (23)$$

Координатное представление для матрицы плотности можно найти из (22) методом, изложенным в [10].

Движение атома осуществляется в поле, являющемся усредненной величиной от парного потенциала Φ_{12} с обрезывающим множителем $\exp[-\beta\Phi_{12}]$. Решение получено на основе квантовой стационарной цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова. Необходимость учета короткодействующих корреляций возникает при описании квантовых кристаллов. Для этого, например, Носанов [11] предложил волновую функцию брать в виде

$$\Psi^{(N)} = \Phi_0(1, \dots, N) F(1, \dots, N), \quad (24)$$

здесь $F(1, \dots, N)$ — функция Ястрова:

$$F(1, \dots, N) = \prod_{i < j} f(ij), \quad (25)$$

где $f(ij) = f(|q_i - q_j|)$ служит мерой корреляции частиц i и j .

При этом нетрудно показать, что данное рассмотрение эквивалентно введению потенциала $\Phi_{ij} f_{ij}$. Этот эффективный потенциал быстро стремится к нулю при $r_{ij} \rightarrow 0$, так что сингулярность Φ_{ij} сглаживается. Полученный эффективный потенциал позволяет описать поведение квантовых кристаллов, что недоступно самосогласованному приближению.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору И. П. Базарову за постановку задачи и обсуждение статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 2. Киев, 1970, с. 99.
2. Базаров И. П. Статистическая теория кристаллического состояния. М., 1972, 118 с.
3. Базаров И. П., Николаев П. Н. Теория кристалла с учетом коллективных колебаний.— Теор. и матем. физ., 1977, 31, № 1, 125—132.
4. Базаров И. П., Николаев П. Н. Решение цепочки уравнений для корреляционных функций.— Вести. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1978, 19, № 3, 59—62.
5. Базаров И. П., Николаев П. Н. Статистическая теория кристалла с многочастичным взаимодействием с учетом коллективных колебаний.— Деп. ВИНТИ, № 4005—76ДЕП, 1976, 25 с.
6. Николаев П. Н. О границе абсолютной устойчивости кристаллов.— Изв. вузов. Физика, 1977, № 3, 144—147.
7. Николаев П. Н. Уравнения состояния кристалла с трехчастичным взаимодействием при учете коллективных колебаний.— Вести. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1977, 18, № 5, 58—66.
8. Геворкян Э. В. Метод Боголюбова в квантовой теории кристалла с многочастичным взаимодействием.— Теор. и матем. физ., 1976, 26, № 2, 282—287.

9. Gilvargy J. J. The Lindemann and Gruneisen laws.—Phys. Rev., 1956, 102, N 2, 308—316.
 10. Фейнман Р. Статистическая механика. М., 1975, 408 с.
 11. Nosanov L. H. Theory of quantum crystals.—Phys. Rev. 1966, 146, N 1, 126—133.

Поступила в редакцию
13.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 539.12.01

В. В. БЕЛОКУРОВ, Н. И. УСЮКИНА

О ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ ФОРМФАКТОРОВ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

1. Исследование асимптотик формфакторов скалярных частиц в неабелевых калибровочных теориях представляет собой важную задачу, поскольку скалярные поля с необходимостью входят во все модели объединенных взаимодействий, основанные на механизме спонтанного нарушения симметрии.

В настоящее время, кроме теории возмущений, не существует других способов изучения асимптотик вершинных функций в неабелевых калибровочных теориях.

В работе [1] мы предложили метод вычисления ведущих асимптотик вершинных функций квантовой теории поля в рамках теории возмущений. Этот метод представляет собой модификацию известной техники α -представления [2] и основан на последовательном использовании связи координатного и импульсного представлений. Так как при исследовании асимптотик вершинных функций в различных порядках теории возмущений возникает необходимость вычисления сверточных импульсных интегралов, соответствующих виртуальным петлям, и в силу того, что фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов, последовательный переход из импульсного представления в координатное и обратно существенно упрощает задачу.

Отметим, что вычисления в старших порядках теории возмущений предложенным нами методом гораздо проще, чем громоздкие вычисления с использованием стандартной техники α -представления [3], [4] или вычисления, использующие параметризацию Судакова [5], которая трудноприменима в неабелевых калибровочных теориях из-за наличия вершин, описывающих самодействие векторных полей.

В работе [1] мы применили предложенный метод к изучению в квантовой хромодинамике групп-синглетного и несинглетного формфакторов кварка. В настоящей статье, используя предложенный в [1] метод, мы вычисляем в неабелевых калибровочных теориях синглетный и несинглетный формфакторы скалярных частиц с точностью до шестого порядка теории возмущений.

2. Пусть для определенности мультиплет скалярных полей $\varphi_i(x)$ реализует присоединенное представление некоторой полупростой компактной группы (например, $SU(n)$). Лагранжиан в этой теории имеет вид

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i + gf_{ijk}B_\mu^j B_\nu^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^i - gf_{ijk}B_\mu^j \varphi^k)^2 + \varphi_i \partial_\mu \varphi_i \cdot J_\mu,$$