

9. Gilvargy J. J. The Lindemann and Gruneisen laws.—Phys. Rev., 1956, 102, N 2, 308—316.
 10. Фейнман Р. Статистическая механика. М., 1975, 408 с.
 11. Nosanov L. H. Theory of quantum crystals.—Phys. Rev. 1966, 146, N 1, 126—133.

Поступила в редакцию
13.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 539.12.01

В. В. БЕЛОКУРОВ, Н. И. УСЮКИНА

О ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ ФОРМФАКТОРОВ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

1. Исследование асимптотик формфакторов скалярных частиц в неабелевых калибровочных теориях представляет собой важную задачу, поскольку скалярные поля с необходимостью входят во все модели объединенных взаимодействий, основанные на механизме спонтанного нарушения симметрии.

В настоящее время, кроме теории возмущений, не существует других способов изучения асимптотик вершинных функций в неабелевых калибровочных теориях.

В работе [1] мы предложили метод вычисления ведущих асимптотик вершинных функций квантовой теории поля в рамках теории возмущений. Этот метод представляет собой модификацию известной техники α -представления [2] и основан на последовательном использовании связи координатного и импульсного представлений. Так как при исследовании асимптотик вершинных функций в различных порядках теории возмущений возникает необходимость вычисления сверточных импульсных интегралов, соответствующих виртуальным петлям, и в силу того, что фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов, последовательный переход из импульсного представления в координатное и обратно существенно упрощает задачу.

Отметим, что вычисления в старших порядках теории возмущений предложенным нами методом гораздо проще, чем громоздкие вычисления с использованием стандартной техники α -представления [3], [4] или вычисления, использующие параметризацию Судакова [5], которая трудноприменима в неабелевых калибровочных теориях из-за наличия вершин, описывающих самодействие векторных полей.

В работе [1] мы применили предложенный метод к изучению в квантовой хромодинамике групп-синглетного и несинглетного формфакторов кварка. В настоящей статье, используя предложенный в [1] метод, мы вычисляем в неабелевых калибровочных теориях синглетный и несинглетный формфакторы скалярных частиц с точностью до шестого порядка теории возмущений.

2. Пусть для определенности мультиплет скалярных полей $\varphi_i(x)$ реализует присоединенное представление некоторой полупростой компактной группы (например, $SU(n)$). Лагранжиан в этой теории имеет вид

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i + gf_{ijk}B_\mu^j B_\nu^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^i - gf_{ijk}B_\mu^j \varphi^k)^2 + \varphi_i \partial_\mu \varphi_i \cdot J_\mu,$$

где первое слагаемое представляет собой лагранжиан поля Янга — Миллса B_μ^i , второе слагаемое описывает взаимодействие скалярного поля с калибровочным, а третье — взаимодействие с групп-синглетным внешним источником J_μ .

Групповая структура учитывается сопоставлением каждой тройной вершине структурной константы f_{ijk} . Кроме обычных янг-милловских вершин в теории присутствуют тройные вершины $gf_{ijk}\partial_\mu\phi^i\phi^jB_\mu^k$ и четверные $(g^2/2)f_{ijkl}B_\mu^i\phi^jB_\mu^k\phi^l$. Нетрудно видеть, что диаграммы с четверными вершинами не дают вклада в старшую асимптотику изучаемых формфакторов.

Рассмотрим асимптотическое поведение интересующих нас вершинных функций в кинематической области

$$(k+p)^2 \rightarrow \infty, \quad \tau \equiv \frac{k^2}{(k+p)^2} \rightarrow 0, \quad \lambda \equiv \frac{p^2}{(k+p)^2} \rightarrow 0.$$

Выражение для главной асимптотики любой диаграммы n -го порядка можно представить в виде

$$F^{\mu}((k+p)^2, \lambda, \tau) = XYZ \left(\frac{-g^2}{8\pi^2} \right)^n \frac{1}{(n!)^2} \ln^n \lambda \ln^n \tau \cdot (k+p)^\mu,$$

т. е. коэффициент при старшей степени логарифма представляет собой произведение трех множителей — группового X , кинематического Y и динамического Z .

Групповые множители выражаются через операторы Казимира, определенные соотношениями

$$2B\delta_{ij} = f_{ikn}f_{jkn}; \quad f_{xly}f_{y}f_{z}f_{z}f_{2kuf}f_{unx}T_iT_jT_k = HT_n,$$

где T_i — матрицы присоединенного представления.

3. Для вычисления динамических коэффициентов удобно использовать переход из координатного представления в импульсное и обратно, который связан с использованием формулы перехода для безмассовой функции Грина [2] ($\lambda \neq 2, 3, \dots$):

$$F \left\{ \frac{1}{(x^2 - i0)^\lambda} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int dx \frac{e^{ikx}}{(x^2 - i0)^\lambda} = \frac{1}{4^{\lambda-1}} \cdot \frac{\Gamma(2-\lambda)}{F(\lambda)} \cdot \frac{1}{(k^2 + i0)^{2-\lambda}}. \quad (1)$$

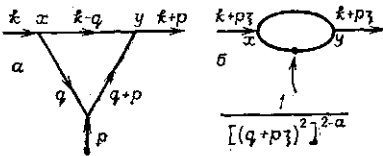


Рис. 1

Продемонстрируем теперь, как работает предложенный в [1] метод вычисления асимптотик диаграмм.

Рассмотрим сначала простейший пример — вершинную функцию во втором порядке теории возмущений в φ^3 -теории (рис. 1). Для вычисления ее асимптотики проделаем следующее:

1) Возьмем фурье-образ произведения двух пропагаторов. Используя фейнмановскую параметризацию, свернем это произведение.

2) Разложим полученное выражение в меллиновский интеграл по отношению $p^2/(q+p_3^2)^2$.

3) Выполним сдвиг в интеграле Фурье, т. е. приведем диаграмму рис. 1, а к диаграмме рис. 1, б (в дальнейшем будем называть эту процедуру «подтягиванием»).

4) Воспользовавшись формулой (1), получим

$$\begin{aligned}
 F_q \left\{ \frac{1}{q^2 (q+p)^2} \right\} &= F_q \int_0^1 \frac{d\xi}{\{(q+p\xi_1)^2 + p^2 \xi_1 \xi_2\}^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_q \int_0^1 d\xi \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma(a) \Gamma(2-a) (\xi_1 \xi_2)^{-a}}{(p^2)^a \{(q+p\xi_1)^2\}^{2-a}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int_0^1 d\xi e^{-ip\xi(x-y)} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma(a)}{(p^2)^a} F_q \left\{ \frac{1}{(q^2)^{2-a}} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int_0^1 d\xi e^{-ip\xi(x-y)} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^2(a)}{(p^2)^a \{(x-y)^2\}^a}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Вершинной функции рис. 1 в координатном представлении соответствует произведение двух множителей: выражения (2) и оставшегося пропагатора, равного $\{(x-y)^2 - i0\}^{-1}$. Таким образом, для рис. 1 в координатном представлении имеем выражение

$$\int_0^1 d\xi e^{-ip\xi(x-y)} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^2(a)}{(p^2)^a \{(x-y)^2\}^{1+a}}.$$

В импульсном представлении, воспользовавшись (1), получим для исследуемой диаграммы представление

$$\int_0^1 d\xi \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^2(a)}{(p^2)^a \{k^2 + 2kp\xi\}^{1-a}} = \frac{1}{2kp} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^2(a)}{\lambda^a} \int_0^1 \frac{d\xi}{\{\tau + \xi\}^{1-a}}, \quad (3)$$

что приводит к асимптотике

$$(1/2kp) \ln \lambda \ln \tau.$$

4. Покажем теперь, как вычисляются нашим методом динамические коэффициенты. Рассмотрим для этого ряд диаграмм рис. 2, лишённых кинематических структур, т. е. ряд скалярных диаграмм того же вида. Редукционная процедура для скалярной диаграммы типа диаграммы 2 на рис. 2 представлена на рис. 3. Написать для нее представление типа (3) несколько сложнее. Для этого выполним подтягивание и приведем диаграмму а рис. 3 к диаграмме б. Воспользуемся α -представлением функции Грина (в целях краткости изложения всюду далее опускаем нормировочные множители).

$$G(x^2, \mu^2) = \int_0^\infty d\alpha \exp \{i(\mu^2/4\alpha) - ix^2 \alpha\}$$

и приведем асимптотику свертки

$$\int d\eta \frac{\partial}{\partial \mu^2} G((x-\eta)^2, \mu^2) G((z-\eta)^2) G((y-\eta)^2) e^{i\eta p n}$$

в асимптотической области $(x-z)^2 \rightarrow 0$, $(z-y)^2 \rightarrow 0$, $(x-y)^2 \rightarrow 0$ к асимптотике следующего интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \int_0^{\infty} d\lambda \int \Pi d\alpha_i \delta(1 - \sum \alpha_i) e^{i(\mu^2/4\alpha_i\lambda)} \exp \{i\mathcal{P}(\alpha_1 x + \alpha_2 z + \alpha_3 y)\} \times$$

$$\times \exp \{-i(x-y)^2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda - i(x-z)^2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda - i(z-y)^2 \alpha_2 \alpha_3 \lambda\},$$

который нетрудно представить в виде разложения в меллиновские интегралы (сохраняем только множители, сингулярные в какой-либо из точек $a=0, b=0, c=0$, либо в какой-либо комбинации этих точек):

$$\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \int_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty} db \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} dc \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a+b+c)}{(\mu^2)^{a+b+c} \{(z-y)^2\}^a \{(x-z)^2\}^b \{(x-y)^2\}^c} \times$$

$$\times \int \Pi d\alpha_i \delta(1 - \sum \alpha_i) \alpha_1^{a-1} \exp \{i\mathcal{P}(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)\}. \quad (4)$$

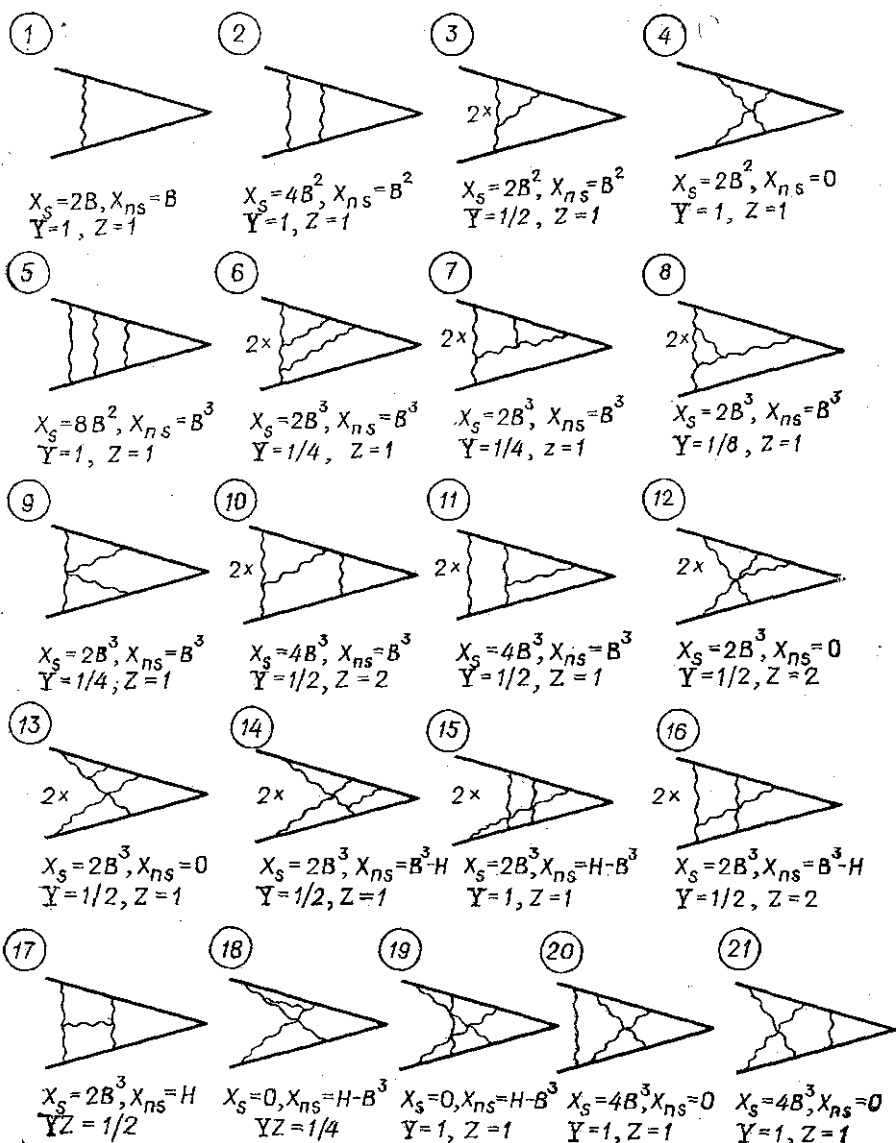


Рис. 2

Роль массы здесь, так же как и в (2), играет p^2 , умноженный на соответствующие фейнмановские параметры. Легко видеть, что ведущая асимптотика определяется областью переменных a_i , где $a_1 \sim 0$. В этой области в меллиновском разложении мы получаем еще одну функцию $\Gamma(a)$, приводящую в результате к дополнительному множителю $\ln \lambda$.

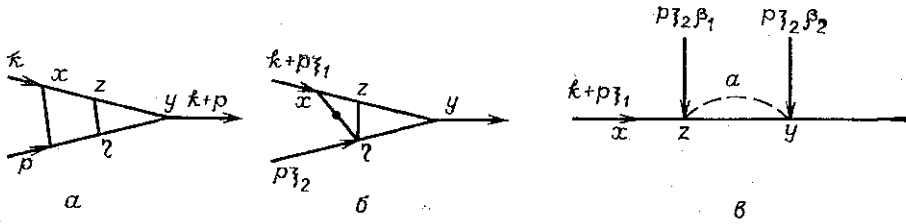


Рис. 3

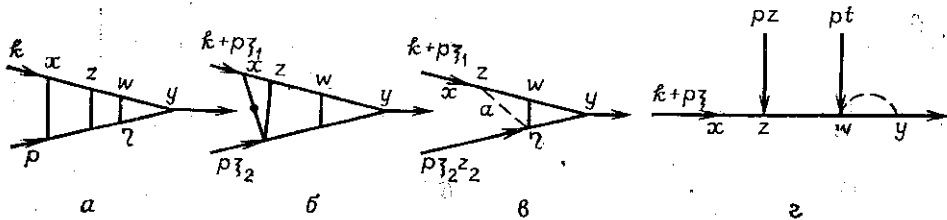


Рис. 4

Если к тому же можно уже на этом этапе перейти к пределу $(x-z)^2 \rightarrow 0$, $(x-y)^2 \rightarrow 0$ (что допустимо для данной диаграммы, но не для любой произвольной — см., например, диаграмму 12 рис. 2), то (4) принимает вид

$$\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^3(a)}{(\mu^2)^a \{(z-y)^2\}^a} \int \prod_i^2 d\beta_i \delta(1 - \sum \beta_i) \exp\{i\mathcal{D}(\beta_1 z + \beta_2 y)\},$$

а диаграмма б рис. 3 редуцируется к диаграмме в, где штрихованной линии в координатном представлении соответствует функция распространения вида $\{(z-y)^2\}^{-a}$, а соответствующей петле — функция распространения $\{(z-y)^2\}^{-(1+a)}$.

В импульсном представлении для рассматриваемой диаграммы получаем представление

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^2} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^3(a)}{\lambda^a} \int_0^1 \frac{d\xi d\beta}{(\tau + \xi)(\tau + \xi + \beta)}$$

и соответственно асимптотику

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^2} \frac{1}{(2i)^2} \ln^2 \lambda \ln^2 \tau.$$

Аналогично строится редуцирующая процедура (рис. 4) для бесструктурной диаграммы типа диаграммы 4 рис. 2. Интегрирование по η для диаграммы в рис. 4 выглядит следующим образом:

$$\int \frac{d\eta e^{i\mathcal{D}\eta}}{\{(z-\eta)^2\}^a \{(w-\eta)^2\}^2 \{(\eta-y)^2\}^2} = \int \frac{Pd\alpha_i \delta(1 - \sum \alpha_i) \alpha_1^{a-1} \exp\{i\mathcal{D}(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + y\alpha_3)\}}{\{(w-y)^2\}^2 \alpha_2 \alpha_3^a} \Rightarrow \Rightarrow \int_0^1 dt \frac{\Gamma(a)}{\{(w-y)^2\}^a} \exp\{i\mathcal{D}(wt_1 + yt_2)\}.$$

Таким образом, в импульсном представлении для рассматриваемой диаграммы получаем представление

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^3} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \frac{\Gamma^4(a)}{\lambda^a} \int_0^1 \frac{d\xi dz dt}{(\tau+\xi)(\tau+\xi+z)(\tau+\xi+z+t)}$$

и соответственно асимптотику

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^3} \frac{1}{\{3!\}^2} \ln^3 \lambda \ln^3 \tau. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь редуционную процедуру для диаграммы 12 рис. 2. Редуционная процедура для нее (рис. 5) приводит к несколько иной картине, чем только что рассмотренная. Эта диаграмма представ-

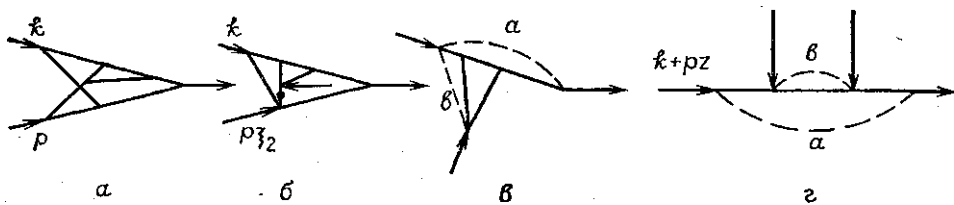


Рис. 5

ляет собой пример того случая, когда в формуле (4) на втором этапе нельзя пока заменить контурный интеграл по b вычетом в точке $b=0$. В результате асимптотика определяется выражением

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^3} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \int_{b_0-i\infty}^{b_0+i\infty} db \frac{\Gamma^2(a) \Gamma^2(b) \Gamma(a+b)}{\lambda^{a+b}} \int \frac{d\xi dz dy \xi}{(\tau+z)(\tau+z+\xi y)(\tau+z+\xi)}. \quad (6)$$

Множитель ξ здесь появляется при учете векторной структуры соответствующей диаграммы, для которой мы пока сохранили в настоящем рассмотрении только динамическую часть.

Вычисляя теперь интегралы по a и b , получим

$$\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} da \left\{ \frac{(-\ln \lambda) \Gamma^3(a)!}{\lambda^a} - \frac{1}{a^4 \lambda^a} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{3!} \ln^3 \lambda$$

и соответственно для асимптотики диаграммы выражение

$$\frac{1}{\{(k+p)^2\}^3} \left(\frac{2}{3!} \ln^3 \lambda \right) \left(\frac{1}{3!} \ln^3 \tau \right). \quad (7)$$

Мы видим, что асимптотика (7) отличается от асимптотики (5) множителем 2. Этот множитель мы и называем динамическим.

Перейдем теперь к вычислению кинематических множителей. Кинематический множитель данной диаграммы n -го порядка получается после сворачивания приводящей к старшей асимптотике структуры в числителе, записанном по правилам Фейнмана, и сокращения с величиной $[(k+p)^2]^n$, возникающей в знаменателе в результате интегрирования. Вычисления показывают, что каждая тройная янг-миллсовская вершина, присутствующая в диаграмме, приводит к дополнитель-

ному кинематическому множителю (1/2) по сравнению с диаграммами без этих вершин. Для диаграммы 1 рис. 2 кинематический множитель определяется структурой

$$2k^\alpha 2p^\alpha (k+p)^\mu \Rightarrow 2(k+p)^2 (k+p)^\mu.$$

Таким образом, для асимптотики этой диаграммы (восстанавливая нормировочные множители) получим выражение

$$\left(\frac{-g^2}{8\pi^2}\right) \ln \lambda \ln \tau (k+p)^\mu.$$

Аналогично, учитывая кинематическую структуру диаграммы 2 рис. 2, получим асимптотику

$$\left(\frac{-g^2}{8\pi^2}\right)^2 \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \ln^2 \lambda \ln^2 \tau (k+p)^\mu$$

и так далее, например, для диаграммы 5 рис. 2

$$\left(\frac{-g^2}{8\pi^2}\right)^3 \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \ln^3 \lambda \ln^3 \tau (k+p)^\mu. \quad (8)$$

Учет кинематической структуры для диаграммы 12 рис. 2 приводит к множителю ξ в (6) и к дополнительному кинематическому множителю (1/2) по сравнению с (8).

Таким образом, с точностью до шестого порядка синглетный и не-синглетный формфакторы скалярных частиц в неабелевых калибровочных теориях имеют вид

$$F_s = 1 - 2B \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \lambda \ln \tau + \frac{(2B)^2}{2} \left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^2 \ln^2 \lambda \ln^2 \tau - \\ - \frac{(2B)^3}{3!} \left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^3 \ln^3 \lambda \ln^3 \tau;$$

$$F_{ns} = 1 - B \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \lambda \ln \tau + \frac{B^2}{2} \left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^2 \ln^2 \lambda \ln^2 \tau - \\ - \frac{B^3}{3!} \left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^3 \ln^3 \lambda \ln^3 \tau + \Delta,$$

$$\Delta = \frac{B^3 - H}{36} \frac{1}{4} \left(\frac{g^2}{8\pi^2}\right)^3 \ln^3 \lambda \ln^3 \tau.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белокуров В. В., Усюкина Н. И. Об одном методе вычисления дважды логарифмической асимптотики вершинных функций в квантовой теории поля.— Теор. и матем. физика, 1979, 41, 157—168.
2. Ефремов А. В. Докт. дис. Дубна, 1970; Завьялов О. И. Докт. дис. Дубна, 1971.
3. Carazzone J. J., Poggio E. C., Quinn H. R. Calculation of asymptotic behaviour of form factors in non-Abelian gauge theories.— Phys. Rev., 1975, D 11, 2286—2299.
4. Cornwall J. M., Tiktopoulos G. Infrared behaviour of non-Abelian gauge theories.— Phys. Rev., 1976, D 13, 3370—3397.
5. Судаков В. В. Вершинные части для сверхвысоких энергий в квантовой электродинамике.— ЖЭТФ, 1956, 30, 87—95.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. М., 1958, 439 с.

Поступила в редакцию
10.01.78