

8. Левшин Л. В., Митцель Ю. А., Низамов Н. Особенности ассоциации молекул родаминовых красителей в неполярных растворителях.—Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1968, № 6, 65—71.
9. Головина А. П., Митцель Ю. А., Левшин Л. В., Бобровская Е. А. Спектроскопическое изучение бесцветных форм молекул трифенилметановых и родаминовых красителей.—Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1969, № 4, 36—41.
10. Низамов Н., Левшин Л. В., Джумадинов Р. Х., Атаходжаев А. К. Межмолекулярные взаимодействия в растворах родамина С и их спектроскопические проявления.—Журн. прикл. спектроскопии, 1975, 24, 271—275.
11. Джумадинов Р. Х. Спектроскопическое исследование межмолекулярных взаимодействий в растворах родаминовых красителей и некоторых других соединений. Автореф. канд. дис. Л., 1977, 19 с.

Поступила в редакцию  
08.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 532.517.3

Е. В. АСТАШКИНА, Ю. М. ХОФ (ГДР)

### О РОЛИ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ КОНВЕКЦИИ К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Известно, что с увеличением градиента температуры в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости происходит переход от линейного режима теплопроводности к конвективному движению в виде роликов. При дальнейшем увеличении градиента после ряда бифуркаций возникает турбулентность. Классически [1] гидродинамическая турбулентность трактуется как существенное проявление бесконечного числа степеней свободы системы, что приводит к необходимости учета огромного числа (вообще говоря, некратных) мод как во времени, так и в пространстве (см., например, обзор [2]). Изучая процесс перехода от роликовой конвекции к турбулентности, можно, оставив в центре внимания лишь конвективные пространственные моды, получить при больших градиентах температуры довольно широкий спектр колебаний амплитуд этих мод во времени. В настоящей работе уделено внимание роли тепловых флуктуаций в эволюции временного спектра.

Исходная система уравнений (1) содержит уравнения Навье—Стокса, теплопроводности и непрерывности, в которых присутствуют гидродинамические флуктуации в форме, предложенной Ландау и Лифшицем [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{v}\nabla)u + \frac{\partial P}{\partial x} / \rho - \nu \Delta u = \left( \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) / \rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\mathbf{v}\nabla)w + \frac{\partial P}{\partial z} / \rho - \nu \Delta w + g = \left( \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right) / \rho,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T - \chi \Delta T = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) / \rho c_p,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\langle S_{ij} S_{kl} \rangle_{r,r';t,t'} = 2\nu \rho k \bar{T} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \left( \delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

$$\langle q_i q_j \rangle_{r,r';t,t'} = 2\chi c_p \rho k \bar{T}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ij} \quad (i, j, k, l = x, z),$$

где  $\rho$ ,  $t$ ,  $g$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $v$ ,  $\chi$ ,  $c_p$  имеют такой же смысл, как в [1],  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — координата (по  $y$  задача однородна), причем начало координат лежит на нижней границе слоя, а ось  $z$  направлена противоположно градиенту температуры,  $\mathbf{v} = (u, \omega)$  — скорость,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T(x, z)$  — средняя температура в данной точке. Из системы (1) с помощью процедуры Галеркина можно получить замкнутую систему стохастических дифференциальных уравнений для амплитуд основных пространственных мод роликовой конвекции (по аналогии с [4, 5]). Пусть  $X$  есть амплитуда моды потока жидкости, а  $Y$  и  $Z$  — амплитуды мод отклонения профиля температуры от линейного. Возьмем в (1) первое приближение по малым отклонениям температуры, плотности и давления от равновесных значений и введем безразмерное время  $\tau$ , как в [5]. В результате имеем систему уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -\sigma X + \sigma Y + \xi_x(\tau), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -Y + rX - XZ + \xi_y(\tau), \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -bZ + XY + \xi_z(\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\langle \xi_i \rangle = 0; \quad \langle \xi_i(\tau) \xi_j(\tau') \rangle = D_i \delta_{ij} \delta(\tau - \tau'); \quad i, j = X, Y, Z,$$

где

$$D_X = \frac{a^2 k v T_0}{\pi^2 \rho_0 \chi^3 (1 + a^2)^3 L_y} (1 + \Delta T / 2 T_0 + \beta \Delta T / 2),$$

$$D_Y = \frac{2a^5 H^4 k g^2 \beta^2 T_0^2}{\pi^6 (1 + a^2)^6 \rho_0 c_p \chi^2 v^2 L_y} (1 + \Delta T / T_0 + \beta \Delta T / 2),$$

$$D_Z = b D_Y / 2.$$

Здесь  $\sigma = v/\chi$  — число Прандтля,  $r = Ra \frac{a^2}{\pi^4 (1 + a^2)^3}$ ,  $Ra = \frac{g \beta H^3 \Delta T}{\chi v}$  — число Рейля,  $H$  — высота слоя,  $H/a$  — характерный размер по оси  $x$ ,  $b = 4/(1 + a^2)$ ,  $T_0$  и  $\rho_0$  — средние по объему значения температуры и плотности,  $\Delta T$  — разница температур нижней и верхней границ слоя,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $L_y$  — характерный размер по оси  $y$ . Численные значения параметров можно оценить на основе экспериментальных данных [6]: для воды с  $\sigma \cong 6,7$ ;  $b \cong 3$  имеем  $D_X \cong 10^{-11}$ ,  $D_Y \cong D_Z \cong 10^{-15}$ , для силиконового масла с  $\sigma = 860$ :  $D_X \cong 10^{-8}$ ,  $D_Y \cong D_Z \cong 10^{-17}$ .

Система уравнений (2) решалась на ЭВМ методом Рунге — Кутты для значений параметров [5]:  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r > 1$  (они не сильно отличаются от значений для воды). Мы наблюдали поведение системы, увеличивая  $r$ , и сравнивали его с поведением без шума [7]. В отсутствие шума при  $1 < r < 13,926$  система Лоренца имеет в фазовом пространстве два устойчивых узла-фокуса  $C^+$  и  $C^-$ , соответствующих режиму стационарной роликовой конвекции с двумя возможными направлениями вращения жидкости. При  $r \cong 13,926$  в фазовом пространстве образуется область стохастического поведения, которая при  $r \cong 24,06$  становится притягивающей, причем она отделена от точек  $C^\pm$  неустойчивыми предельными циклами, которые постепенно стягиваются к точкам  $C^\pm$  и при  $r = r^* \cong 24,74$  «влипают» в них. Странный аттрактор Лоренца становится единственным притягивающим множеством. В присутствии шума точки  $C^\pm$  теряют устойчивость иным образом, при

$r=r^{**} < r^*$ , причем  $r^{**}$  тем меньше, чем больше шум. При  $r=r^{**}$  от режима стационарной конвекции мягко ответвляется режим незатухающих пульсаций потока и температуры, что соответствует образованию кратеров функции распределения вероятности около  $C^\pm$  (рис. 1). Для иллюстрации эффекта мы изобразили на рис. 1, б точки  $(X_c, Y_c)$  пересечения случайной фазовой траектории с плоскостью  $Z=r-1$ , в которой

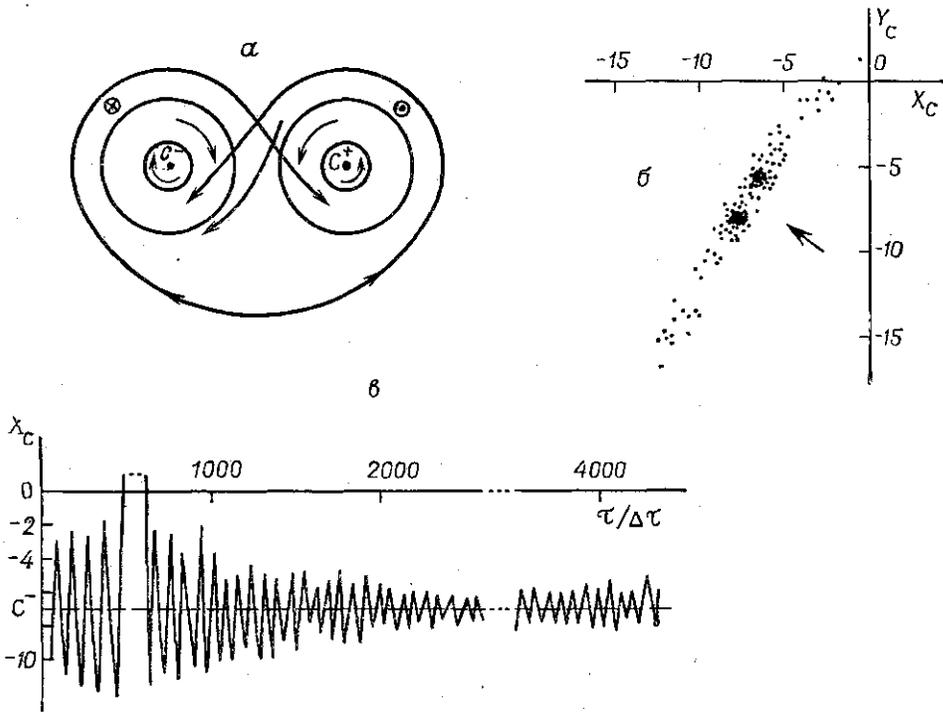


Рис. 1. Поведение системы (2) при  $r=20$ ,  $D_x=1$ ,  $D_y=D_z=10^{-4}$ :  
 а — вид характерных траекторий в фазовом пространстве при направлении взгляда  $\perp$  оси  $Z$  и указанном на рис. 1, б стрелкой; находящаяся над (за) плоскостью рисунка отмечена значком  $\odot$  ( $\otimes$ );  
 б — вид в сечении  $Z=r-1$ ;  
 в — эволюция координат  $X_c$  точек пересечения фазовых траекторий с плоскостью  $Z=r-1$  во времени (для наглядности экспериментальные точки соединены сплошной линией),  $\Delta t=0,01$  — инкремент счета

лежат точки  $C^\pm$ . Густота точек характеризует распределение вероятности в указанной плоскости. С ростом  $r$  глубина кратеров функции распределения увеличивается, горбы удаляются от  $C^\pm$ , уширяются и подседают (рис. 2). Шум не оказывает существенного влияния на образование и эволюцию областей стохастического поведения при  $r < r^{**}$ . При  $r \geq r^*$  «индуцированный шумом» [8, 9] режим пульсаций дополняет область стохастического поведения, образуя единый аттрактор, поведение которого мало отличается от поведения детерминистической модели Лоренца.

Обсудив качественные эффекты, остановимся на некоторых количественных аспектах. Из результатов численного эксперимента видно, что для смещения (по  $r$ ) порога нарушения устойчивости стационарной конвекции на величину порядка единиц нужен большой шум. Тепловые гидродинамические шумы (3) не способны так сильно сдвинуть порог, чтоб пульсации начались еще до возбуждения новых пространственных

мод и мы имели бы право оставаться в рамках модели Лоренца. При значениях же  $r$ , близких к  $r^*$ , модель Лоренца становится несопоставимой с реальным течением в слое жидкости. Однако она остается в силе при описании конвективной петли. Шум же, входящий в уравнения (2), может иметь другое происхождение и быть не малым. Нами было исследовано влияние флуктуаций при подогреве («шумящее»  $r$ ), которое, как оказалось, дает такой же качественный эффект. Полученный результат, не имеющий непосредственной значимости для перехода к реальной гидродинамической турбулентности в слое жидкости, имеет значение для статистической теории нелинейных волн. Действительно, модель Лоренца описывает распадное взаимодействие параметрически возбуждаемых мод ( $X$  и  $Y$ ) с затухающей ( $Z$ ). К ней сводятся или близки по свойствам многие задачи теории нелинейных волн. Чувствительность системы по отношению к шуму, определяемая параметрами  $b$ ,  $\sigma$ ,  $r$ , может оказаться значительной. Полученный результат может, например, найти применение в теории квантовых генераторов, одно-

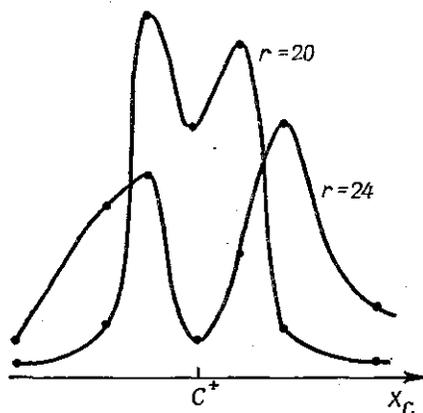


Рис. 2. Разрежение относительной плотности точек пересечения фазовых траекторий с плоскостью  $Z = r - 1$  вблизи  $C^\pm$  с ростом  $r$ :  $D_x = 10^{-3}$ ,  $D_y = D_z = 10^{-9}$

довый режим которых описывается уравнениями (2) [10], а источниками шума являются тепловые флуктуации поля в резонаторе и спонтанные флуктуации поляризации [11]. Состояние рис. 1 соответствует незатухающим пичкам. Для окончательного заключения, однако, необходим детальный анализ и сравнение с данными экспериментов.

Авторы благодарны проф. Ю. Л. Климонтовичу за постановку задачи и полезные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954, 127—179, 261—264.
2. Монин А. С. О природе турбулентности.—Успехи физ. наук, 1978, 125, вып. 1, 97—122.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. О гидродинамических флуктуациях.—ЖЭТФ, 1957, 32, 618—619.
4. Saltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem. I.—J. Atmos. Sci., 1962, 19, 329—341.
5. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow.—J. Atmos. Sci., 1963, 20, 130—141.
6. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow.—J. Fluid Mech., 1970, 42, 295—307.
7. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность. Успехи физ. наук, 1978, 125, вып. 1, 123—168.
8. Михайлов А. С. Неравновесный фазовый переход в биологическом сообществе.—ДАН СССР, 1978, 243, 786—788.
9. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems.—Z. Physik, 1978, B 29, 367—373.
10. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers.—Phys. Lett., 1975, 53A, 77—78.
11. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. Под ред. Ю. Л. Климонтовича М., 1974, 311—399.

Поступила в редакцию  
02.02.1979