ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 523.11

В. Г. АГАКОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ С ВРАЩЕНИЕМ И ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Ранее были получены метрики всех физических однородных стационарных [1] и нестационарных [2] пространств с вращением — пространств вращающейся ($A_{ik}\neq 0$) системы отсчета (с. о.), для которых выполняются условия однородности

$$^*\nabla_j A_{ik}=0,\quad ^*\nabla_j C_{ik}=0,\quad ^*\nabla_j D_{ik}=0,\quad ^*\nabla_j F_i=0^*.$$

В данной работе рассматриваются пространства вращающейся с. о., для которых справедливы соотношения $^*\nabla_j D_{ik}=0$, $F_i=0$. Здесь ∇_j — символ ковариантной производной. Звездочка означает хронометрически инвариантное (х. и.) дифференцирование, A_{ik} — х. и. тензор угловой скорости вращения, C_{ik} — х. и. тензор Риччи, D_{ik} — х. и. тензор скоростей деформации, F_i — х. и. вектор гравитационно-инерциальной силы,

$$D_{ik}=\frac{1}{2}\frac{^*\partial h_{ik}}{\partial t},\quad D=\frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t},\quad \frac{^*\partial}{\partial t}=(g_{00})^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{^*\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}-g_{0i}\,(cg_{00})^{-1}\frac{\partial}{\partial t},$$

$h_{ik}=-g_{ik}+g_{0i}g_{0k}/g_{00}$ — х. и. метрический тензор, h — фундаментальный определитель [3].

Теорема. Если в пространстве вращающейся ($A_{ik}\neq 0$) с. о. справедливы соотношения $^*\nabla_j D_{ik}=0$, $F_i=0$, то при $g_{00}=1$ тензор h_{ik} выражается линейной комбинацией величин типа $a_{ik}e^{rt}$, $b_{ik}e^{\alpha t}\cos\beta t$, $d_{ik}e^{\alpha t}\sin\beta t$, где a_{ik}, b_{ik}, d_{ik} — некоторые многочлены от t; r, α, β — функции пространственных координат.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{2A_{ik}}{c^2}\frac{^*\partial h_{lm}}{\partial t}+H_{lki\cdot}^{\;\;\;\;j}h_{jm}+H_{mki\cdot}^{\;\;\;\;j}h_{lj}=0. \tag{1}$$

Здесь $H_{lki\cdot}^{\;\;\;\;j}=\frac{^*\partial\Delta_{il}^j}{\partial x^k}-\frac{^*\partial\Delta_{kl}^j}{\partial x^i}+\Delta_{il}^m\Delta_{km}^j-\Delta_{kl}^m\Delta_{im}^j$; Δ_{il}^j — х. и. символ Кристоффеля. В силу $F_i=0$ выбором временной координаты можно добиться $g_{00}=1$, $\frac{^*\partial g_{0i}}{\partial t}=0$, а из $^*\nabla_j D_{ik}=0$, $F_i=0$ следует равенство $\frac{^*\partial H_{lki\cdot}^{\;\;\;\;j}}{\partial t}=0$. Тогда (1) представляет собой систему дифференциальных уравнений с постоянными (не зависящими от t) коэффициентами. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение такой системы есть линейная комбинация линейно-независимых частных решений вида $a_{ik}e^{rt}$, $b_{ik}e^{\alpha t}\cos\beta t$, $d_{ik}e^{\alpha t}\sin\beta t$, где r, $\alpha\pm\varepsilon_0\beta$ (ε_0 — мнимая единица) есть корни характеристического уравнения системы, а величины a_{ik}, b_{ik}, d_{ik} — многочлены от t. Теорема доказана.

Решая систему (1), определяем временную зависимость величин h_{ik}. Для сокращения вычислений предположим, что в нашей с. о.

* Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3; фундаментальную скорость обозначим через c.

$h_{13}=h_{23}=0$. Тогда с учетом сигнатурных условий, условий однородности ${}^*\nabla_j D_{ik}=0$, $F_i=0$, используя координатный произвол, получаем следующие выражения для компонент метрического тензора:

$$1.\ h_{11}=\varepsilon^2 Q(a^2+C_0\sin\beta t)e^{kt},\ h_{33}=a^2,\ h_{13}=h_{23}=0,$$

$$h_{22}=Q(a^2-C_0\sin\beta t)e^{kt},\ h_{12}=\varepsilon Q C_0\cos\beta t e^{kt},$$

$$g_{03}=0,\ g_{00}=1,\ g_{01}=g_{01}(x^1,x^3),\ g_{02}=g_{02}(x^1,x^2),\ |C_0|<a^2, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \ln Q(x^1,x^2)}{\partial x^1}=\frac{g_{01}k}{c}-\frac{\beta g_{02}}{c}\varepsilon(x^1,x^2),$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial x^2}+2\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial x^2}=\frac{g_{02}}{c}k+\frac{\beta g_{01}}{c\varepsilon},$$

$$\frac{\partial \ln g_{01}}{\partial x^2}-\frac{\partial \ln g_{02}}{\partial x^1}=\frac{2}{c}\omega_0\varepsilon Q a^2;\ \omega_0, C_0, a, k, \beta=\mathrm{const}.$$

$$2.\ h_{11}=Q^2(\lambda^2+t^2)e^{kt},\ h_{22}=Q^2\varepsilon^2 e^{kt},\ h_{12}=Q^2\varepsilon t e^{kt},$$

$$h_{13}=h_{23}=0,\ h_{33}=a^2,\ g_{00}=1,\ g_{01}=g_{01}(x^1,x^2),\ g_{02}=g_{02}(x^1,x^2),$$

$$\frac{\partial \ln Q(x^1,x^2)}{\partial x^1}=\frac{kg_{01}}{2c}-\frac{g_{02}}{c\varepsilon}-\frac{\partial \ln\varepsilon(x^1,x^2)}{\partial x^1},\ \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1}=$$

$$=\frac{2}{c}\omega_0 Q\lambda\varepsilon a;\ \omega_0, \lambda, a, k=\mathrm{const}.$$

$$3.\ h_{11}=a^2 e^{(k+\beta)t},\ h_{12}=\mu_0 a\delta e^{kt},\ h_{33}=a^2,\ h_{13}=h_{23}=0,$$

$$h_{22}=\delta^2 e^{(k-\beta)t},\ g_{00}=1,\ g_{02}=g_{03}=0,\ g_{01}=g_{01}(x^1,x^2),\ |\mu_0|<1,$$

$$\frac{\partial \ln\delta(x^1,x^2)}{\partial x^1}=\frac{1}{2c}g_{01}(k-\beta),\ \frac{\partial \ln g_{01}}{\partial x^2}=\frac{2}{c}\omega_0 a^2\delta\mu_0;\ \omega_0, a, k, \mu_0=\mathrm{const}.$$

$$4.\ h_{11}=a^2 e^{(k+\beta)t},\ h_{22}=\delta^2 e^{(k-\beta)t},\ h_{33}=\mu^2 e^{(k-\beta)t},$$

$$h_{ik}=0,\ i\neq k,\ g_{00}=1,\ g_{02}=g_{03}=0,\ \frac{\partial \ln g_{01}}{\partial x^2}=\frac{2\omega_0}{c}a\delta\mu;$$

$$\omega_0, \beta, a=\mathrm{const},\ \frac{\partial \ln\delta}{\partial x^1}=\frac{g_{01}}{2c}(k-\beta),$$

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x^1}=\frac{g_{01}}{2c}(k-\beta),\ \mu=\mu(x^1,x^2),\ \delta=\delta(x^1,x^2).$$

Заметим, что эти метрики получены без использования уравнений Эйнштейна, только исходя из условий $A_{ik}\neq 0$, ${}^*\nabla_j D_{ik}=0$, $F_i=0$. Решая уравнения Эйнштейна, можно получить определенные космологические модели с вращением. Например, решая уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной среды для метрики (2) при $k=0$, получаем космологическую модель, которая является нестационарным обобщением модели Гёделя (ср. с [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаков В. Г. Физически однородные стационарные поля тяготения.— Сообщения ГАИШ, 1978, № 192, 3—17.
2. Агаков В. Г. Физически однородные пространства с вращением.— Вестн Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон., 1979, 20, № 4, 73—80.

3. Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной.— В кн.: Труды 6-го совещания по вопросам космогонии. М., 1957, Изд-во АН СССР, М., 1959, 144—173.

Поступила в редакцию
12.01.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 621.372.221

В. А. ДАВЫДОВ

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ДИПОЛЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

Работы [1 и 2] об излучении движущегося заряда при скачкообразном изменении во времени диэлектрической проницаемости среды стимулировали интерес к излучению источников в нестационарной среде.

В связи с излучением нейтральных молекул в средах с изменяющейся во времени диэлектрической проницаемостью представляет интерес расчет излучения произвольным образом ориентированного точечного диполя в нестационарной среде.

Пусть точечный диполь с дипольным моментом p, который ориентирован под углом α к направлению движения, движется вдоль оси z со скоростью V. Когда диполь находится в начале координат в момент времени $t=0$, происходит скачок диэлектрической проницаемости от ε_1 до ε_2. Если нас интересуют не поля во всем пространстве, а лишь интенсивность излучения, то нет смысла решать уравнения Максвелла с источниками, соответствующими движущемуся диполю; интенсивность излучения легко найти, воспользовавшись результатами работы [3]. В ней показано, что электрическое поле излучения заряда q при мгновенном скачке диэлектрической проницаемости описывается следующим выражением:

$$E_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta) = \frac{f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta)\,\delta\left(r - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)}{r}, \tag{1}$$

где

$$f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\theta) = \frac{q\beta^2}{\varepsilon_2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{(1-\beta^2\varepsilon_1\cos^2\theta)(1-\beta\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta)}, \tag{2}$$

t — время, прошедшее с момента скачка, r — радиус-вектор, проведенный из начала координат (точки, в которой был заряд в момент скачка), $\beta = V/c$, θ — угол между направлениями скорости (осью z) и волнового вектора. Как показывает выражение (1), все поле излучения заряда сосредоточено на сферической оболочке, расширяющейся от начала координат со скоростью $c/\sqrt{\varepsilon_2}$. Для того чтобы найти поле излучения диполя, представим его как систему из двух разноименных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии $a=p/q$ друг от друга. Впоследствии устремим a к нулю при условии $p=\mathrm{const}$.

Поле излучения заряда $+q$ описывается следующим выражением:

$$E_+ = \frac{f_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\delta\left(r - \frac{ct}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)}{r}, \tag{3}$$