9. Зубов В. Г., Кундикова Н. Д., Осипова Л. П. Влияние радиационных дефектов на температурную зависимость интенсивности линий в спектре комбинационного рассеяния α-кварца.— Укр. физ. журн., 1976, **21**, 1470—1475.
10. Захарова Е. К., Зубов В. Г., Осипова Л. П. Об изменении интенсивности линий спектра комбинационного рассеяния α-кварца при облучении быстрыми нейтронами.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1972, **13**, 353—355.
11. Захарова Е. К., Зубов В. Г., Осипова Л. П. Температурная зависимость частоты и ширины линий комбинационного рассеяния в кристаллическом кварце.— Кристаллография, 1974, **19**, 788—792.

Поступила в редакцию
03.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, Т. 21, № 3

УДК 517.948.3

В. Б. ГОСТЕВ, В. С. МИНЕЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В статье [1] был предложен метод обращения для интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,y)\,\psi(y)\,dy \tag{1}$$

с факторизованными S-образами ядер

$$K(x, y) = \int_p^q S(\lambda, x)\,K_s(\lambda, y)\,d\lambda, \tag{2}$$

$$K_s(\lambda, y) = \bar{t}(\lambda, y)\,f(\lambda), \tag{3}$$

где $S(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$ — ядра интегральных преобразований (Фурье, Ханкеля, Лапласа и т. д.) с известными ядрами обращений $\bar{S}(\lambda, x)$, $\bar{t}(\lambda, x)$.

В настоящей заметке предлагается обобщение метода на случай более сложных функциональных уравнений вида

$$\varphi(x) = \int_a^b \int_a^b dy\,dz\,K(x, y, z)\,\psi(y)\,\psi(z), \tag{4}$$

где функция $\varphi(x)$ и ядро $K(x, y, z)$ считаются известными, а функция $\psi(x)$ подлежит определению. По аналогии с условием факторизуемости ядра (3) предположим, что S-образ ядра (4) факторизован, т. е.

$$K(x, y, z) = \int_p^q d\lambda S(\lambda,x)\,\bar{t}(\lambda,y)\,\bar{t}(\lambda, z)\,f(\lambda). \tag{5}$$

Разложив $\varphi(x)$ по $S(\lambda, x)$

$$\varphi(x) = \int_p^q d\lambda S(\lambda, x)\,\varphi_s(\lambda) \tag{6}$$

и подставив в (4) разложение (5), получим после изменения порядка интегрирования алгебраическую связь S-образа $\varphi(x)$—$\varphi_s(\lambda)$ и t — образа $\psi(x)$—$\psi_t(\lambda)$

$$\psi_t(\lambda) = \int_a^b \psi(x) \bar{t}(\lambda, x)\, dx \qquad (7)$$

в виде

$$\psi_t(\lambda) = \pm \left(\frac{\varphi_s(\lambda)}{f(\lambda)} \right)^{1/2}. \qquad (8)$$

Обращение связи (8) дает формальное решение уравнения (4) с факторизованным ядром (5)

$$\psi(x) = \pm \int_k^l \frac{d\lambda t(\lambda, x)}{f(\lambda)} \left(\int_c^d \bar{S}(\lambda, y)\, \varphi(y)\, dy \right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Как и для уравнений (1), имеется возможность решения неоднородного уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b \int_a^b dy dz\, K(x, y, z)\, \psi(y)\, \psi(z), \qquad (10)$$

ядро которого имеет вид (5) при дополнительном условии совпадения ядер преобразований $S(\lambda, x)$ и $t(\lambda, x)$. Алгебраическая связь S-образов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет в этом случае вид

$$\psi_s(\lambda) = \varphi_s(\lambda) + \mu f(\lambda)\, \psi_S^2(\lambda). \qquad (11)$$

Обращение решения квадратного относительно $\psi_s(\lambda)$ уравнения (11) дает два решения уравнения (10).

Изменение порядка интегрирования и вопрос о корректности решений (9) и (11) обосновывается конкретно для различных видов интегральных преобразований ($S(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$) и функций $f(\lambda)$ (5).

Несмотря на специальный вид ядра (5), можно привести много примеров таких ядер, что оправдывает их рассмотрение. Разберем один пример подробно и укажем несколько ядер вида (5).

Уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty dy dz\, \frac{\pi}{2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{zx}{y} + \frac{zy}{x} + \frac{xy}{z} \right) \right\} \psi(y)\, \psi(z) \qquad (12)$$

можно преобразовать к виду (5) с помощью разложения ядра по мнимому индексу модифицированной функции Бесселя ($K_{i\lambda}(x)$) — разложения Конторовича — Лебедева (К — Л) [2]:

$$\frac{\pi^2}{4} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{zx}{y} + \frac{zy}{x} + \frac{xy}{z} \right) \right\} = \int_0^\infty d\lambda \lambda\, \mathrm{sh}\, \pi\lambda\, K_{i\lambda}(x)\, K_{i\lambda}(y)\, K_{i\lambda}(z). \qquad (13)$$

Воспользовавшись разложением К — Л в форме

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty d\lambda\, K_{i\lambda}(x)\, \lambda\, \mathrm{sh}\, \pi\lambda \varphi_{\text{кл}}(\lambda) \\ \varphi_{\text{кл}}(\lambda) &= \int_0^\infty dx \varphi(x)\, K_{i\lambda}(x) \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

находим с помощью (8) $\left(\bar{t}(\lambda, x) = K_{i\lambda}(x),\ S(\lambda, x) = \frac{2}{\pi^2 x}\lambda \operatorname{sh}\pi\lambda K_{i\lambda}(x)\right)$

$$\psi_{\text{кл}}(\lambda) = \pm(\xi_{\text{кл}}(\lambda))^{1/2}, \tag{15}$$

где

$$\xi(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\varphi(x). \tag{16}$$

Обратив связь (15), получаем два решения уравнения (12):

$$\psi(x) = \pm\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty d\lambda \sqrt{\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y} K_{i\lambda}(y)\,dy\,\lambda \operatorname{sh}\pi\lambda\, K_{i\lambda}(x)}. \tag{17}$$

Так как в этом примере ядра разложений $S(\lambda, x)$, $t(\lambda, x)$ совпадают с точностью до множителей, зависящих от x и λ по отдельности, то с помощью формулы (11) можно решить и неоднородное уравнение (10) с ядром (13).

Другой пример — уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^\infty\int_0^\infty dydz\,\frac{2^{3\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(xyz)^{\nu+1/2}\psi(y)\psi(z)}{[(x^2+y^2+z^2)^2-4y^2z^2]^{\nu+1/2}}, \tag{18}$$

обращение которого с помощью формулы (8.13.8) из [3] (преобразования Ханкеля и Мейера) имеет вид

$$\psi(x) = \int_0^\infty d\lambda\lambda^{-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\varphi(z) I_\nu(\lambda z)\sqrt{\lambda z}\,dz\right]^{1/2} J_\nu(\lambda x)\sqrt{\lambda x}, \tag{19}$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Примеры ядер вида (5) даются также формулами (11.281) [2], (1.2.26), (1.13.77), (8.13.6), (12.1.10) [3] и многими другими.

Уравнения вида (4) встречаются в кинетической теории газов [4, гл. I, § 3], теории распространения волн в неоднородной среде [5] формула (245).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гостев В. Б., Френкин А. Р. Метод двойных интегральных преобразований для уравнения Фредгольма первого рода.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1979, 20, № 6, 27—35.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I, 2. М., 1970.
4. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., 1946.
5. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., 1958.

Поступила в редакцию
02.02.79