Заметим также, что для правильного учета всех поправок порядка α^2 к синхротронному излучению следует также принять во внимание вклад радиационных эффектов, связанных с изменением массы электрона и фотона во внешнем поле [13], однако это выходит за рамки задачи, поставленной в данной работе.

В заключение авторы благодарят А. А. Соколова за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никишов А. И., Ритус В. И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле.— ЖЭТФ, 1964, **46** (I): 776—796; (II): 1768—1781.
2. Байер В. Н., Катков В. М. О тормозном излучении при столкновении частиц большой энергии в магнитном поле.— ДАН СССР, 1972, **207**, 68—70.
3. Жуковский В. Ч., Херрманн И. Эффект Комптона и вынужденный эффект Комптона в постоянном электромагнитном поле.— Ядерная физика, 1971, **14**, 150—158. Влияние постоянного электромагнитного поля на фотообразование электронно-позитронных пар.— Там же, 1014—1019.
4. Жуковский В. Ч., Никитина Н. С. Индуцированное двухфотонное синхротронное излучение и комптоновское рассеяние в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1973, **64**, 1169—1177. Индуцированное двухфотонное образование электронно-позитронных пар в магнитном поле.— Ядерная физика, 1974, **19**, 148—154.
5. Morozov D. A., Ritus V. I. Elastic electron scattring in an intense field and two-photon emission.— Nucl. Phys., 1975, **B86**, 309—332.
6. Жуковский В. Ч. Тормозное излучение электрона на ядре, находящемся в постоянном внешнем поле.— ЖЭТФ, 1974, **66**, 9—15.
7. Борисов А. В., Жуковский В. Ч. Фоторождение электронно-позитронных пар на ядре в присутствии постоянного внешнего поля.— Ядерная физика, 1975, **21**, 579—585.
8. Волощенко А. М., Жуковский В. Ч., Павленко Ю. Г. Тормозное излучение релятивистских электронов на ядре в магнитном поле в приближении мягких фотонов.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, № 5, 560—568.
9. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. М., 1968, 451—454.
10. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., 1973, 376 с.
11. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон М., 1974, 392 с.
12. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949, с. 349.
13. Ритус В. И. Радиационные поправки к движению электронов и фотонов в интенсивном поле и их аналитические свойства.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М., 1972, 306—334.

Поступила в редакцию
18.07.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 4

УДК 530.4

А. П. ДЁМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. III. ГРУППА ISO(p, q)

В предыдущих статьях [1—2] нами были исследованы с точки зрения инвариантных операторов алгебры Ли группы неоднородных линейных преобразований. Рассмотрим теперь группу неоднородных псевдоортогональных преобразований.

1. Для группы $ISO(p, q)$ алгебра Ли имеет вид:

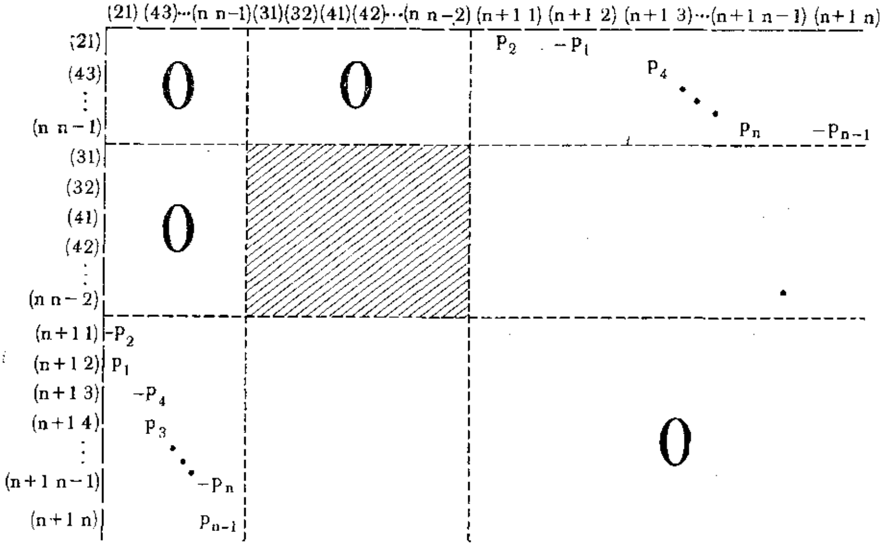
$$
\begin{gathered}
[I_{\mu\nu}, I_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho} I_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} I_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} I_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} I_{\mu\rho}, \\
[I_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu, \\
[P_\mu, P_\nu] = 0, \\
g = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q}\}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

2. Из (1) в соответствии с критерием (8) статьи [1] следует, что группа $ISO(p, q)$ может иметь только полиномиальные инвариантные операторы.

3. Переходим к определению числа операторов Казимира. Определим сначала верхнюю границу, пользуясь методом, изложенным в [1]. Элементы матрицы M, определяемой в [1], для группы $ISO(p, q)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
M_{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\lambda\tau}_{\mu\nu,\rho\sigma} a_{\lambda\tau} = (1 - \delta_{\nu n+1}\delta_{\sigma n+1})(g_{\nu\rho} a_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} a_{\nu\rho} - \\
- g_{\mu\rho} a_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} a_{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Положим в (2) все переменные $a_{\lambda\tau}$ равными нулю, за исключением переменных, соответствующих трансляциям и генераторам $I_{2i,2i-1}$ ($i=1, 2, \ldots, [n/2]$); тогда матрица запишется следующим образом (для определенности рассмотрим случай четного n; анализ для нечетного n будет аналогичным):



Левый верхний и правый нижний миноры имеют нулевые элементы из-за коммутативности соответствующих генераторов; левый и верхний миноры, соседние с заштрихованным, являются нулевыми в силу нашего выбора значений переменных $a_{\lambda\tau}$. Вычеркнем строки и столбцы с номерами $(n+1\ 2k)$, $k=1, \ldots, n/2=[(n+1)/2]$ (так как n — четное) и покажем, что оставшийся минор M' отличен от нуля. Разложение M' по строкам и столбцам, соответствующим трансляциям, дает

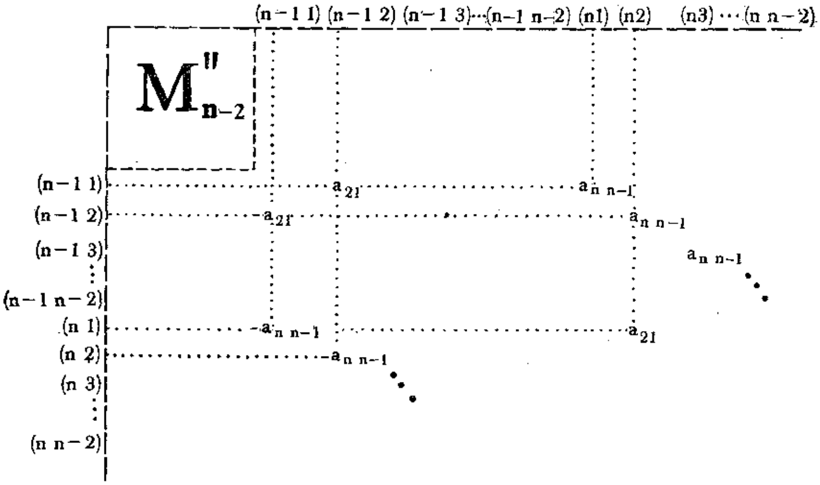
$$M' \sim p_2^2 p_4^2 \ldots p_n^2 M_n'',$$

где M_n'' — средний заштрихованный минор.

Докажем, что $M'' \neq 0$ по индукции. Для $n=4$

$$M_4'' = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{43} & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & a_{43} \\ -a_{43} & 0 & 0 & a_{21} \\ 0 & -a_{43} & -a_{31} & 0 \end{vmatrix} = a_{23}^4 + a_{21}^4 - 2a_{43}^2 a_{21}^2 \neq 0.$$

Пусть $M_{n-2}'' \neq 0$ для $n-2$. Покажем, что это будет справедливо и для n. Минор M_n'' имеет вид



Положим здесь переменную $a_{n\,n-1}=0$ (это можно сделать, так как в миноре M_{n-2}'' ее нет). Тогда в каждой добавившейся строке и столбце останется по одному элементу. Разложение минора по этим строкам и столбцам приводит к минору M_{n-2}'', отличному от нуля. Итак, верхняя грань $r(G)$ ранга матрицы M определяется неравенством

$$r(G) \geqslant \dim G - (n+1)/2.$$

Отсюда, согласно [1, (7)], для числа операторов Казимира группы $ISO(p, q)$ получаем неравенство

$$\tau \leqslant (n+1)/2. \tag{3}$$

Для того чтобы получить точное значение числа операторов Казимира, воспользуемся еще одним методом [3], который позволяет найти нижнюю границу для числа инвариантных операторов τ. В указанном методе задача нахождения операторов Казимира неоднородной группы сводится к использованию операторов Казимира однородной группы. Это можно сделать, если расширить неоднородную группу до соответствующей однородной высшей размерности. Процедура расширения для рассматриваемой нами группы $ISO(p, q)$ сводится к следующему.

Обозначим

$$J_\mu = (1/2)(P^\nu M_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} P^\nu). \tag{4}$$

Очевидным инвариантом $ISO(p, q)$ является оператор

$$P^2 = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu,$$

где $g = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q}\}$ — метрический тензор.

Тогда, как можно проверить, оператор

$$M_{\mu n+1} = (P^2)^{-1/2} J_\mu \tag{5}$$

вместе с генераторами однородной подгруппы $ISO(p, q)$ образует алгебру $SO(p, q+1)$, которая и является расширением $ISO(p, q)$.

Пользуясь (4) и (5), можно доказать теорему [3]. *Если элемент обертывающей алгебры $ISO(p, q)$ коммутирует со всеми $M_{\mu\nu}$ и J_μ, то он коммутирует и со всеми P_μ.*

Если теперь подставить (4) и (5) в выражение для инварианта однородной группы $SO(p, q+1)$ и домножить его на достаточно высокую степень P^2, то получится полиномиальный оператор, коммутирующий со всеми $M_{\mu\nu}$ и J_μ, а значит, и с P_μ, т. е. получится инвариантный оператор неоднородной группы.

Из определения расширения видно, что обертывающие алгебры группы $ISO(p, q)$ и $SO(p, q+1)$, вообще говоря, не совпадают. Из построения следует, что операторы Казимира группы $SO(p, q+1)$ принадлежат также и центру универсальной обертывающей алгебры исходной алгебры Ли. Обратное, вообще говоря, неверно — оператор Казимира группы $ISO(p, q)$ может не принадлежать обертывающей алгебре группы $SO(p, q+1)$. Таким образом, этот метод дает для числа операторов Казимира только нижнюю границу

$$\tau_{ISO(p,q)} \geqslant \tau_{SO(p,q+1)} = (n+1)/2, \; n = p + q. \tag{6}$$

Сравнение (3) и (6) приводит к точному числу операторов Казимира неоднородной псевдоортогональной группы $ISO(p, q)$:

$$\tau = [(p + q + 1)/2]. \tag{7}$$

Заметим, что изложенный метод пригоден не для всех групп, так как не всегда удается построить необходимое расширение, не увеличивая размерность подгруппы трансляций (что имеет место, например, в случае линейной и симплектической групп). Явный вид операторов Казимира определяется системой (3) статьи [1]. Решая ее, можно получить, что в соответствии с (7), например, группа $ISO(1, 1)$ имеет один оператор Казимира:

$$C = P_1^2 - P_2^2;$$

а группа $ISO(3)$ — два:

$$C_1 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2,$$

$$C_2 = \mathscr{L}_1 P_1 + \mathscr{L}_2 P_2 + \mathscr{L}_3 P_3$$

($\mathscr{L}_i$ — генераторы подгруппы вращений). К такому же виду инвариантных операторов приводит метод расширения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа $IGL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, 21, № 2, 3—7.
2. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. II. Группа $ISL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, 21, № 2, 7—10.
3. Rosen J. Construction of invariants for Lee algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal and pseudo-unitary groups.— J. Math. Phys., 1968, 9, 1305—1307.

Поступила в редакцию
17.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 4

УДК 530.4

А. П. ДЁМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА, М. ЧАЙЧИАН (Финляндия)

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. IV. УНИТАРНЫЕ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В предыдущих статьях [1—3] были исследованы с точки зрения инвариантных операторов алгебры Ли линейных и ортогональных неоднородных групп. Цель настоящей статьи найти число инвариантных операторов для унитарной (полной и унимодулярной) и симплектической групп.

§ 1. Группы IU(p, q), ISU(p, q). 1. Алгебра Ли $IU(p, q)$ выглядит так:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\sigma}] = g_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} L_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu} L_{\lambda\mu};$$
$$[L_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}] = -g_{\nu\lambda} Q_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} Q_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} Q_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu} Q_{\lambda\nu};$$
$$[Q_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}] = -g_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} L_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\lambda\mu} + g_{\sigma\mu} L_{\lambda\nu};$$
$$[L_{\mu\nu}, P_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} P_{\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\nu};\ [Q_{\mu\nu}, R_{\lambda}] = -g_{\nu\lambda} P_{\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\nu};$$
$$[Q_{\mu\nu}, P_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} R_{\mu} + g_{\lambda\mu} R_{\nu};\ [L_{\mu\nu}, R_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} R_{\mu} - g_{\lambda\mu} R_{\nu};$$
$$L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu};\ Q_{\mu\nu} = +Q_{\nu\mu}\ (\mu, \nu, \lambda, \sigma = 1, \ldots, n).$$

В случае $ISU(p, q)$ достаточно вместо $Q_{\mu\mu}$ в качестве базисных элементов рассматривать $(Q_{\mu\mu} - Q_{\mu+1\,\mu+1})$.

2. Из алгебры Ли видно, что $ISU(p, q)$ удовлетворяет критерию [1, (8)] *

$$[ISU(p,q), ISU(p,q)] = ISU(p,q),$$

а алгебра Ли $IU(p, q)$ — не удовлетворяет. Значит, унимодулярная унитарная неоднородная группа имеет только полиномиальные инварианты.

3. Переходим к определению числа инвариантных операторов. Рассмотрим сначала группу $IU(p, q)$. Верхняя граница числа инвариантных операторов определяется рангом матрицы M (см. [1, (6)]),

* Здесь и далее [1, (a)] означает формулу (a) статьи [1].