СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа $IGL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, 21, № 2, 3—7.
2. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. II. Группа $ISL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, 21, № 2, 7—10.
3. Rosen J. Construction of invariants for Lee algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal and pseudo-unitary groups.— J. Math. Phys., 1968, 9, 1305—1307.

Поступила в редакцию
17.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 4

УДК 530.4

А. П. ДЁМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА, М. ЧАЙЧИАН (Финляндия)

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. IV. УНИТАРНЫЕ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В предыдущих статьях [1—3] были исследованы с точки зрения инвариантных операторов алгебры Ли линейных и ортогональных неоднородных групп. Цель настоящей статьи найти число инвариантных операторов для унитарной (полной и унимодулярной) и симплектической групп.

§ 1. Группы IU(p, q), ISU(p, q). 1. Алгебра Ли $IU(p, q)$ выглядит так:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\sigma}] = g_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} L_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu} L_{\lambda\mu};$$

$$[L_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}] = -g_{\nu\lambda} Q_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} Q_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} Q_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu} Q_{\lambda\nu};$$

$$[Q_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}] = -g_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu} L_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\lambda\mu} + g_{\sigma\mu} L_{\lambda\nu};$$

$$[L_{\mu\nu}, P_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} P_{\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\nu};\ [Q_{\mu\nu}, R_{\lambda}] = -g_{\nu\lambda} P_{\mu} - g_{\lambda\mu} P_{\nu};$$

$$[Q_{\mu\nu}, P_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} R_{\mu} + g_{\lambda\mu} R_{\nu};\ [L_{\mu\nu}, R_{\lambda}] = g_{\nu\lambda} R_{\mu} - g_{\lambda\mu} R_{\nu};$$

$$L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu};\ Q_{\mu\nu} = +Q_{\nu\mu}\ (\mu, \nu, \lambda, \sigma = 1, \dots, n).$$

В случае $ISU(p, q)$ достаточно вместо $Q_{\mu\mu}$ в качестве базисных элементов рассматривать $(Q_{\mu\mu} - Q_{\mu+1\ \mu+1})$.

2. Из алгебры Ли видно, что $ISU(p, q)$ удовлетворяет критерию [1, (8)] *

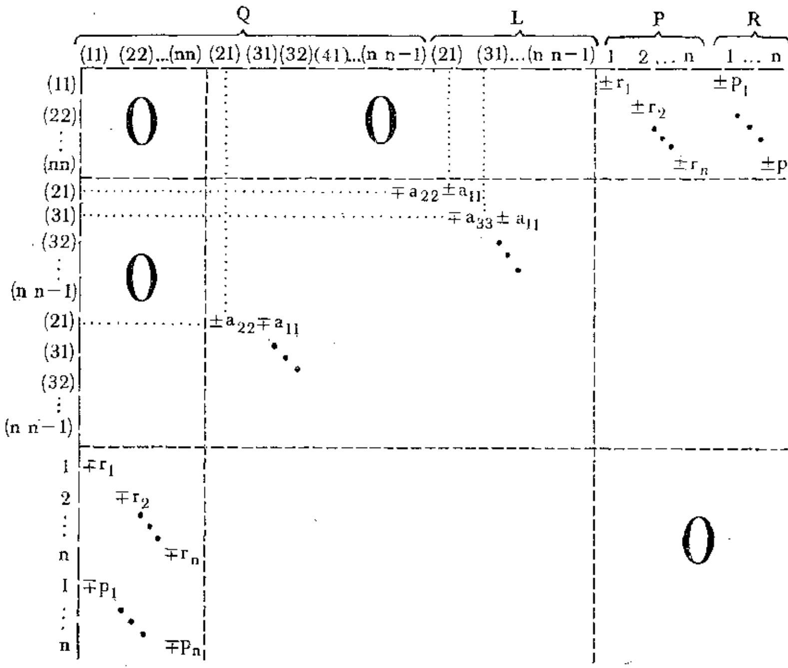
$$[ISU(p,q), ISU(p,q)] = ISU(p,q),$$

а алгебра Ли $IU(p, q)$ — не удовлетворяет. Значит, унимодулярная унитарная неоднородная группа имеет только полиномиальные инварианты.

3. Переходим к определению числа инвариантных операторов. Рассмотрим сначала группу $IU(p, q)$. Верхняя граница числа инвариантных операторов определяется рангом матрицы M (см. [1, (6)]),

* Здесь и далее [1, (a)] означает формулу (a) статьи [1].

которая в нашем случае имеет вид (все переменные, кроме соответствующих $Q_{\mu\mu}$, P_μ и R_μ, положены равными нулю):



Вычерчивая строки и столбцы, соответствующие R-трансляциям, видим, что оставшийся минор $(\dim G-n)$-го порядка ($\dim G$ — размерность группы) отличен от нуля, так как содержит в каждой строке и столбце по одному элементу. Значит, согласно [1, (7)], число инвариантных операторов группы $IU(p,\ q)$ удовлетворяет неравенству

$$\tau_{IU(p,q)} \leqslant n \quad (p+q=n). \tag{1}$$

Для определения нижней границы инвариантов используем метод расширения [4]. Чтобы расширить рассматриваемую неоднородную группу до $U(p,\ q+1)$, введем следующие операторы (учитывая, что $P^2+R^2=P_\mu P^\mu+R_\mu R^\mu$ является инвариантом $IU(p,\ q)$):

$$L_{\mu\, n+1}=(1/2)(P^2+R^2)^{-1/2}(P^\nu L_{\mu\nu}+L_{\mu\nu}P^\nu-R^\nu Q_{\mu\nu}-Q_{\mu\nu}R^\nu),$$

$$Q_{\mu\, n+1}=(1/2)(P^2+R^2)^{-1/2}(R^\nu L_{\mu\nu}+L_{\mu\nu}R^\nu-P^\nu Q_{\mu\nu}+Q_{\mu\nu}P^\nu),$$

$$Q_{n+1\, n+1}=(1/2)(P^2+R^2)^{-1/2}[P^\mu R^\nu L_{\mu\nu}+(P^\mu P^\nu+R^\mu R^\nu)Q_{\mu\nu}].$$

Эти операторы вместе с генераторами однородной подалгебры группы $IU(p,\ q)$ образуют, как можно проверить, алгебру Ли $U(p,\ q+1)$. Далее, аналогично случаю ортогональной группы, можно выделить из известных операторов Казимира $U(p,\ q+1)$ инварианты $IU(p,\ q)$, причем очевидно, что все инвариантные операторы, получаемые этим методом, — полиномиальны (мы можем домножить в случае необходимости на произвольную степень (P^2+R^2)).

Однако, в отличие от псевдоортогональной неоднородной группы, число генераторов $IU(p,\ q)$, равное n^2+2n, меньше размерности $U(p,\ q+1)$ на единицу. Поэтому в действительности не все генераторы расширения $IU(p, q)$ независимы, что обусловит некоторую связь между $n+1$ операторами Казимира расширения $IU(p, q)$.

Таким образом, пользуясь вторым методом, получаем нижнюю границу инвариантных операторов

$$\tau \geqslant n. \tag{2}$$

Сравнение (1) и (2) дает точное равенство для числа операторов Казимира $IU(p, q)$:

$$\tau_{IU(p,q)} = p + q.$$

Заметим, что хотя $IU(p, q)$ не удовлетворяет критерию [1, (8)], все ее инварианты полиномиальны.

Рассмотрим унимодулярную унитарную группу. Процесс расширения для нее не рассмотрен; однако это легко сделать на основе группы $IU(p, q)$. Для этого достаточно в исходной и расширенной группе в качестве базисных элементов алгебры рассматривать не $Q_{\mu\mu}$, а $Q_{\mu\mu} - Q_{\mu+1\ \mu+1}$ (остальные элементы остаются без изменений). Так как инвариант первого порядка для группы $SU(p, q+1)$ тождественно равен нулю, то получаем (аналогично $IU(p, q)$)

$$\tau_{ISU(p,q)} \geqslant n - 1. \tag{3}$$

Покажем, что (3) на самом деле является равенством. Вычеркивая обычным образом строки и столбцы, соответствующие $R_2, \ldots, R_n$, и оставляя ненулевыми переменные, соответствующие $(Q_{\mu\mu} - Q_{\mu+1\ \mu+1})$, $R_\nu, P_1 (a_\mu, r_\nu, p_1)$, с точностью до ненулевого множителя придем к минору $(\dim G - n + 1)$-го порядка.

$$\begin{array}{c|c|ccccc|ccccc|cc}
 & 1 & (21) & (31) & (32) & \ldots & (n\ n-1) & (21) & (31) & (32) & \ldots & (n\ n-1) & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & & & & & & & & & & & \pm r_1 & \pm p_1 \\
\hline
(21) & & & & & & & \pm a_1 & & & & & \pm r_2 & \\
(31) & & & & & & & & \mp a_3 \pm a_1 & & & & \pm r_3 & \\
(32) & & & & & & & & & \mp a_2 & & & 0 & \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & & \pm r_4 & \\
(n\ n-1) & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
\hline
(21) & & \pm a_1 & & & & & & & & & & & \pm r_2 \\
(31) & & & \pm a_3 \mp a_1 & & & & & & & & & & \pm r_3 \\
(32) & & & & \pm a_2 & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & & & & \pm r_4 \\
(n\ n-1) & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\hline
1 & \mp r_1 & \mp r_2 & \mp r_3 & 0 & \mp r_4 \ldots & & & & & & & & \\
1 & \mp p_1 & & & & & & \mp r_2 & \mp r_3 & 0 & \mp r_4 \ldots & & \multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}$$

Полагая теперь $a_1 = 0$ и разлагая по Q_{21}, L_{21} строкам и столбцам, получаем минор, в каждой строке и столбце которого стоит по одному элементу. Таким образом, число операторов Казимира группы $ISU(p, q)$ равно

$$\tau_{ISU(p,q)} = p + q - 1.$$

В качестве примера приведем выражения для инвариантов группы $IU(2)$. Решая систему уравнений в частных производных [1, (3)], аналогично случаю группы $ISL(2, R)$ [2] имеем

$$C_1 = P^2 + R^2,$$

$$C_2 = (P_2^2 + R_2^2) Q_{11} + (P_1^2 + R_1^2) Q_{22} + 2 (P_1 R_2 - P_2 R_1) L_{21} - 2 (P_1 P_2 + R_1 R_2) Q_{21}.$$

К такому же виду можно привести и инварианты $IU(2)$, полученные в [4].

§ 2. Неоднородная симплектическая группа ISp(2n). 1. Алгебра Ли $ISp(2n)$ выглядит так:

$$[I_{\mu\nu}, I_{\rho k}] = \sigma_{\nu\rho} I_{\mu k} + \sigma_{\nu k} I_{\mu\rho} + \sigma_{\mu\rho} I_{\nu k} + \sigma_{\mu k} I_{\nu\rho}, \tag{4}$$

$$[I_{\mu\nu}, P_\rho] = \sigma_{\nu\rho} P_\mu + \sigma_{\mu\rho} P_\nu \, (\mu, \nu, \rho, k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n),$$

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right).$$

2. Из (4) видно, что алгебра Ли группы $ISp(2n)$ удовлетворяет критерию [1, (8)] и имеет поэтому только полиномиальные инварианты.

3. Для числа операторов Казимира симплектической группы нам удалось получить лишь интервал значений. Для симплектической группы метод расширения непригоден. Поэтому, пользуясь методом, изложенным в [1, 5], получим верхнюю границу для числа операторов Казимира

$$\tau_{ISp(2n)} \leqslant n. \tag{5}$$

Для этого, следуя обычной процедуре [1—3], выпишем матрицу M, определяемую [1, (6)], оставляя ненулевыми переменные $a_{\lambda\tau}$, соответствующие подалгебре Картана (I_{i-i}; $i=1, \ldots, n$) и трансляциям:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & (-11)\,(-22)\cdots(-n\,n) & (11)\,(-1-1)\,(21)\cdots(-n\,n) & (1)\;(-1)\;(2)\;(-2)\;(3)\;(-3)\cdots(n)\;(-n) \\
\hline
\begin{matrix}(-11)\\(-22)\\(-33)\\\vdots\\(-nn)\end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix} P_{-1} & -P_1 & & & & \\ & & P_{-2} & -P_2 & & \\ & & & & P_{-3} & -P_3 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & P_{-n}\;\; -P_n \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix}(11)\\(-1-1)\\(21)\\\vdots\\(-nn)\end{matrix} & 0 & \begin{matrix} \\ a_{1-1} \cdots \\ \vdots \\ \\ \\ \end{matrix} & \\
\hline
\begin{matrix}(1)\\(-1)\\(2)\\(-2)\\(3)\\\vdots\\(n)\\(-n)\end{matrix} & \begin{matrix} -P_{-1} & & \\ P_1 & & \\ & -P_{-2} & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ & & \\ & & -P_{-n} \\ & & P_n \end{matrix} & &
\end{array}$$

Вычеркивая n строк и столбцов, соответствующих трансляциям с отрицательными индексами, приходим к ненулевому минору, так как он имеет в каждой строке и столбце по одному элементу. Отсюда следует формула (5).

Покажем, что существует хотя бы один оператор Казимира группы $ISp(2n)$, т. е. существует нижний, отличный от нуля предел для числа операторов Казимира. Для этого сначала рассмотрим группу $ISp(2)$. Она локально изоморфна $ISL(r, R)$. Поэтому, пользуясь результатами работы [2], получаем оператор Казимира группы $ISp(2)$

$$C_2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho=1}^{-2} P_\alpha \sigma_{\alpha\beta} I_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\rho} P_\rho. \tag{6}$$

Но подобный оператор является инвариантом $ISp(2n)$ для любого n. Действительно (предполагая суммирование по повторяющимся индексам),

$$[P_\alpha\sigma_{\alpha\beta}I_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\rho}P_\rho, P_\tau] = P_\alpha\sigma_{\alpha\beta}(\sigma_{\beta\tau}P_\gamma + \sigma_{\gamma\tau}P_\beta)\sigma_{\gamma\rho}P_\rho =$$
$$= P_\alpha\sigma_{\alpha\beta}P_\beta P_\tau - P_\tau P_\gamma\sigma_{\gamma\rho}P_\rho = 0.$$

Аналогично можно показать, что генераторы $I_{\mu\nu}$ также коммутируют с оператором C_{2n}, т. е. C_{2n} — оператор Казимира группы $ISp(2n)$.

Заметим, что поиски других операторов Казимира группы $ISp(2n)$ с помощью тензорного анализа затруднительны. Все свертки с антисимметричными тензорами дают нуль из-за $I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}$; симметричные тензоры не дают сверток, коммутирующих с P_τ. Поэтому остаются операторы типа (6) с различным числом $I_{\mu\nu}$. Однако операторы более высокого порядка с нечетным числом $I_{\mu\nu}$ не коммутируют с P_τ, а операторы с четным числом сводятся к низшим. Например, переставляя генераторы в обратном порядке в операторе

$$C'_{2n} = P_\alpha\sigma_{\alpha\beta}I_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\rho}I_{\rho\tau}\sigma_{\tau\nu}P_\nu,$$

получаем сумму коммутаторов

$$(6n+2)\,C_{2n}.$$

Отсюда, пользуясь антисимметричностью квадратичной формы σ, находим

$$C'_{2n} = (3n+1)\,C_{2n}.$$

Итак, для числа операторов Казимира τ группы $ISp(2n)$ получаем неравенство

$$1 \leqslant \tau \leqslant n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа $IGL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, **21**, № 2, 3—7.
2. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. II. Группа $ISL(n, R)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, **21**, № 2, 7—10.
3. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. III. Группа $ISO(p, q)$.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1980, **21**, № 4, 23—27.
4. Rosen J. Construction of invariants for Lee algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal and pseudo-unitary groups.— J. Math. Phys., 1968, **9**, 1305—1307.
5. Abellanas L., Martines Alonso L. A general setting for Casimir invariants.— J. Math. Phys., 1975, **16**, 1580—1584.

Поступила в редакцию
17.05.78