мости и тангенса угла потерь сегнетоэлектриков в однородных полях СВЧ диапазона (диапазон 3000 МГц).— Изв. АН СССР, сер. физ., 1958, 22, № 12, 1524—1526.
7. Петров В. М. Об измерении $\varepsilon$ и $\mathrm{tg}\,\delta$ диэлектриков методами полукоаксиального резонатора и коаксиальной измерительной линии.— Приб. и техн. эксперимента, 1960, № 4, 118—122.
8. Слуцкая В. В. Тонкие пленки в технике СВЧ. М., 1967, 178—187.
9. Бузин И. М., Коробов А. И., Рукин Е. И., Стародуб А. Е. Использование серийных измерителей перемещений с цифровым отсчетом для автоматизации работы измерительных линий сверхвысокочастотного диапазона.—Приб. и техн. эксперимента, 1976, № 6, 193—194.
10. Davphinee T. M., Preston-Thomas H. A copper resistance temperature scale.— Rev. Sci. Instr., 1954, 25, N 9, 884—886.
11. Роуз-Инс А. Техника низкотемпературного эксперимента. М., 1966, 158—164.
12. Тычино К. К. Пересчетные декады. М., 1976, 93 с.

Поступила в редакцию
11.07.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 4

УДК 521.134

**Г. И. ШИРМИН**

# ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ПОЛУЧАЕМОЙ ИЗ МОДЕЛИ ХУАНГА ОСРЕДНЕНИЕМ ПО СХЕМЕ ФАТУ

**Введение.** Точные частные решения ограниченной задачи трех тел, называемые также точками либрации, со времени открытия Эйлером (1767 г.) и Лагранжем (1772 г.) нашли целый ряд приложений в астрономии и космогонии [1]. Интерес к ним значительно возрос с начала 60-х годов нашего столетия, когда в связи с бурным развитием космических исследований все чаще стали появляться проекты, которые предусматривают использование динамических свойств точек либрации для создания искусственных космических объектов, предназначенных обслуживать межпланетные полеты [2]. Однако модель ограниченной задачи трех тел дает лишь весьма грубое приближение к действительности, ибо, за исключением двух точечных масс, выбираемых в качестве основных, она не учитывает притяжения других тел. В то же время учет влияния на положения либрационных точек всевозможных возмущающих факторов, в том числе и гравитационной природы, приобретает все большее практическое значение ввиду той особой роли, которую точки либрации ограниченной задачи трех тел начинают играть в астродинамике.

В настоящей статье изложено исследование вековых возмущений в положениях точек либрации вследствие притяжения точечной массы, возмущающей силовое поле круговой ограниченной задачи трех тел. Сделано это следующим образом. В рамках варианта дважды ограниченной круговой задачи четырех тел, полученного осреднением по схеме Фату, доказано существование частных решений, аналогичных эйлеровым и лагранжевым. Отклонения соответствующих этим решениям стационарных точек от классических точек либрации интерпретируются как вековые возмущения, произведенные активно гравитирующей массой, притяжение которой игнорируется в ограниченной задаче трех тел. Показано, что указанные возмущения приводят к постоянным смещениям либрационных точек: коллинеарных — вдоль оси абсцисс синодической системы координат и треугольных — в перпендикулярном направлении.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение пассивно гравитирующей материальной точки $P$ в ньютоновском поле притяжения двух других материальных точек $P_0$ и $P_1$ с конечными массами $m_0$ и $m_1$ соответственно, обращающихся вокруг их общего центра масс $G$ по кеплеровым круговым орбитам с радиусами $a_0$ и $a_1$. Пусть, кроме того, на движение точки $P$ влияет притяжение материальной точки $P_s$ с массой $m_s$, движущейся вокруг $G$ в плоскости орбитального движения точечных тел $P_0$ и $P_1$ также по кеплеровой круговой орбите, но другого радиуса $a_s$. При этом предполагается, что как возмущающее тело $P_s$ не оказывает никакого влияния на относительное движение «главных тел» $P_0$ и $P_1$, так и, наоборот, движение возмущающего тела не зависит от основных тел. Описанная выше механическая модель, получившая название «сильно ограниченной задачи четырех тел» [3] или «модели Хуанга» [4], является частным случаем «дважды ограниченной задачи четырех тел» [5].

В синодической барицентрической системе координат $Gxyz$ и стандартных единицах измерения ограниченной задачи трех тел уравнения движения пассивно гравитирующей массы можно записать в виде:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega'_x + R'_x,\quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega'_y + R'_y,\quad \ddot{z} = \Omega'_z + R'_z, \tag{1}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (1 - \mu)/r_0 + \mu/r_1, \tag{2}$$

$$r_0 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2},\quad r_1 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2},$$

а

$$R = \mu_s [1/\Delta_s - (xx_s + yy_s)/a_s^3] \tag{3}$$

— возмущающая функция, в которой через $\Delta_s$ обозначено расстояние между $P$ и $P_s$: $\Delta_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z^2}$. Величины $\mu$ и $\mu_s$ в (2) и (3) — это массы меньшего из главных тел $P_1$ и возмущающего тела $P_s$ в принятых единицах измерения.

Теперь, в соответствии с процедурой осреднения по Фату [6], всюду в дальнейшем вместо полной возмущающей функции (3) будем учитывать лишь ее часть $W$, получаемую в результате осреднения $R$ по средней аномалии $M_s$ возмущающего тела, т. е.

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,dM_s. \tag{4}$$

Последняя после несложных преобразований приводится к виду

$$W = 2\mu_s K(\varkappa)/\pi\sqrt{z^2 + (\rho + a_s)^2}. \tag{5}$$

Здесь $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода с модулем $\varkappa$, определяемым формулой

$$\varkappa^2 = 4\rho a_s/[z^2 + (\rho + a_s)^2], \tag{6}$$

а $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Функция $W$ приведена, таким образом, к виду силовой функции притяжения кругового гауссова кольца [7] с массой, равной массе возмущающего тела. Эта функция учитывает вековые возмущения первого порядка в движении пассивно гравитирующей массы, обусловленные притяжением возмущающего тела.

С учетом замены полной возмущающей функции $R$ ее вековой частью $W$ представим уравнения движения точки $P$ в виде:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega'_x + W'_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega'_y + W'_y, \quad \ddot{z} = \Omega'_z + W'_z. \tag{7}$$

Заметим, что механическая модель, описываемая дифференциальными уравнениями (7), совпадает с одним из вариантов «упрощенной схемы планетной системы», предложенной Н. Д. Моисеевым [8].

Уравнения (7) имеют очевидный первый интеграл:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (\Omega + W) + \text{const},$$

являющийся аналогом знаменитого интеграла Якоби. Возникает естественный вопрос: существуют ли решения уравнений (7), аналогичные лагранжевым и эйлеровым? Ни самим Н. Д. Моисеевым, ни кем-либо еще этот вопрос, насколько нам известно, не ставился. Отыскание таких решений и анализ их свойств составляют цель данной статьи.

**§ 2. Частные решения уравнений (7) и их свойства.** Как это следует из (5), при $\mu_s = 0$ имеем $W = 0$, т. е. в этом случае (7) обращаются в уравнения круговой ограниченной задачи трех тел. Последние же, как известно [9], обладают пятью частными решениями: тремя эйлеровыми

$$x_0 = a_i, \; y_0 = z_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

и двумя лагранжевыми

$$x_0 = \alpha_j, \; y_0 = \beta_j, \; z_0 = 0 \quad (j = 4, 5). \tag{9}$$

В системе координат $Gxyz$ эти решения изображаются неподвижными точками, причем решениям (8) соответствуют коллинеарные точки либрации, а решениям (9) — треугольные.

Стационарные решения уравнений (7), если они существуют, должны определяться из условий обращения в нули функций

$$F_1 = \Omega'_x + W'_x, \; F_2 = \Omega'_y + W'_y, \; F_3 = \Omega'_z + W'_z. \tag{10}$$

Поэтому условиями (причем как необходимыми, так и достаточными) существования частных решений уравнений (7) при $\mu_s \neq 0$ могут считаться следующие равенства:

$$F_l(\mu_s, x, y, z) = 0 \quad (l = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Обозначив соответствующие искомым решениям постоянные значения координат $x$, $y$ и $z$ через $\alpha^*$, $\beta^*$ и $\gamma^*$ и рассматривая соотношения (11) в качестве системы уравнений, определяющей координаты стационарных точек в виде неявных функций параметра $\mu_s$, легко убедиться в том, что в данном случае удовлетворяются все требования теоремы о неявных функциях [10] и, следовательно, существует одна и только одна система функций

$$x = \varphi_1(\mu_s), \; y = \varphi_2(\mu_s), \; z = \varphi_3(\mu_s), \tag{12}$$

представляющих решение уравнений (11), причем функции эти непрерывны в окрестности значения $\mu_s = 0$ и в пределе (при $\mu_s = 0$) совпадают со значениями (8) и (9) координат классических точек либрации.

Остановимся теперь на некоторых свойствах решений (12). Для этого представим уравнения (11) в следующем виде:

$$x\,[1 - A(x, y, z) + \mu_s Q_1(x, y, z)] + \mu(1-\mu)(1/r_1^3 - 1/r_0^3) = 0,$$

$$y\,[1 - A(x, y, z) + \mu_s Q_1(x, y, z)] = 0, \ z\,[A(x, y, z) + \mu_s Q_2(x, y, z)] = 0. \quad (13)$$

Здесь через $A(x, y, z)$ обозначена функция

$$A(x, y, z) = (1-\mu)/r_0^3 + \mu/r_1^3, \quad (14)$$

а $Q_1(x, y, z)$ и $Q_2(x, y, z)$ представляются выражениями

$$Q_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2+(\rho+a_s)^2}}\left[\frac{z^2+a_s^2-\rho^2}{z^2+(\rho-a_s)^2}E(\varkappa) - K(\varkappa)\right], \quad (15)$$

$$Q_2 = 2E(\varkappa)/\pi\sqrt{z^2+(\rho+a_s)^2}\,[z^2+(\rho-a_s)^2], \quad (16)$$

где $E(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра второго рода с модулем (6). Из (14) и (16) видно, что $A(x, y, z)>0$ и $Q_2(x, y, z)>$ $>0$, т. е. для любых $z$: $A(x, y, z)+\mu_s Q_2(x, y, z)>0$. Поэтому третьему уравнению (13) можно удовлетворить лишь значением $z=0$. Следовательно, $\gamma^*=0$ и не существует стационарных точек вне плоскости орбитального движения главных тел. Итак, дифференциальные уравнения (7) имеют лишь частные решения вида

$$x = \varphi_1(\mu_s), \ y = \varphi_2(\mu_s), \ z = 0, \quad (17)$$

причем абсциссы и ординаты соответствующих им точек относительного равновесия в системе $Gxyz$ определятся из первых двух уравнений (13). С учетом того, что при $1-A(x, 0, 0)+\mu_s Q_1(x, 0, 0)\neq 0$ второе уравнение системы (13) может быть удовлетворено лишь значением $y=0$ и, следовательно, $\beta_i^*=0$ $(i=1, 2, 3)$, становится очевидным наличие у дифференциальных уравнений (7) частных решений вида

$$x = \alpha_i^*, \ y = z = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad (18)$$

причем для каждой из соответствующих им неподвижных точек абсциссы определяются в виде неявных функций возмущающей массы из уравнения

$$F_1(\mu_s, x, 0, 0) = 0. \quad (19)$$

Решения (18) аналогичны эйлеровым и совпадают с ними при $\mu_s=0$. Поэтому разности $\delta x_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ — не что иное, как вековые возмущения, вызванные притяжением тела $P_s$. Из всего сказанного выше ясно, что последние приводят к смещению коллинеарных точек из их обычных положений в направлении вдоль оси абсцисс. Однако второе уравнение (13) может удовлетворяться и ненулевым значением $y$, если справедливо равенство

$$1 - A(x, y, 0) + \mu_s Q_1(x, y, 0) = 0. \quad (20)$$

Первое уравнение (13) приводится в этом случае к равенству

$$\mu(1-\mu)(1/\rho_1^3 - 1/\rho_0^3) = 0,$$

обращающемуся в тождество при условии, что

$$\rho_0 = \rho_1, \quad (21)$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \quad \rho_1 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2}. \tag{22}$$

Условие (21) означает, что соответствующие таким решениям неподвижные точки плоскости $(x, y)$ должны образовывать с главными притягивающими телами $P_0$ и $P_1$ равнобедренные треугольники. Из (22) видно, что равенство (21) представляет собой уравнение с одним неизвестным $x$, из которого определяются, и притом однозначно, абсциссы искомых равновесных точек

$$x = \alpha_j^* = 1/2 - \mu \equiv \alpha_j \quad (j = 4, 5). \tag{23}$$

После подстановки вместо $x$ из значений (23) в (20) последнее превращается в уравнение относительно $y$:

$$1 - A(\alpha_j, y, 0) + \mu_s Q_1(\alpha_j, y, 0) = 0, \tag{24}$$

совпадающее при $\mu_s = 0$ с известным уравнением, дающим ординаты $y = \beta_j = \pm\sqrt{3}/2$ $(j = 4, 5)$ треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел. При $\mu_s \neq 0$, но по модулю достаточно малых, ординаты равнобедренных треугольных точек $L_j^*$ $(j = 4, 5)$ могут быть определены в виде неявных функций от $\mu_s$ из уравнения (24). Как следует из (23), вековые возмущения в абсциссах треугольных точек либрации отсутствуют, т. е. возмущающее влияние тела $P_s$ сводится к смещению этих точек из вершин равносторонних треугольников с основанием $P_0P_1$ в направлении, параллельном оси ординат $Gy$.

**§ 3. Вековые возмущения в координатах точек либрации.** С учетом сказанного выше нетрудно вывести аналитические выражения для вековых возмущений, позволяющих судить как о порядке величины, так и о направлении смещения точки либрации.

В зависимости от размеров гауссова кольца в дальнейшем будем различать два случая: случай, когда радиус кольца Гаусса меньше радиус-вектора точки либрации, назовем внутренним, в отличие от внешнего случая, когда радиус соответствующего возмущающему телу $P_s$ кругового гауссова кольца превышает по величине радиус-вектор либрационной точки.

Уравнения (19) и (24) трансцендентны, и их корни не могут быть выражены в конечном виде. Поэтому интересующие нас вековые возмущения в координатах классических точек либрации $L_p$ $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$ представятся в виде бесконечных рядов по целым возрастающим степеням возмущающей массы $\mu_s$. Так, с точностью до членов первого порядка относительно $\mu_s$ выражения для возмущений в абсциссах коллинеарных точек $L_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид:

$$\delta x_i = \begin{cases} 2\mu_s E(k_i)/\pi\alpha_i\sigma_i(1-k_i^2)(1+2A_i), & a_s < \sigma_i, \\ -2\mu_s k_i^2 B(k_i)/\pi\alpha_i a_s(1-k_i^2)(1+2A_i), & a_s > \sigma_i. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $\sigma_i = |\alpha_i|$ — величина радиус-вектора точки $L_i$, т. е. расстояние коллинеарной точки либрации от начала координат $G$,

$$A_i = \frac{1-\mu}{|\alpha_i + \mu|} + \frac{\mu}{|\alpha_i + \mu - 1|},$$

а через $B(k_i)$ обозначен полный эллиптический интеграл Эмде [11]:

$$B(k_i) = \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi d\psi/\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2\psi},$$

связанный с полными эллиптическими интегралами Лежандра соотношением

$$E(k_i) = (1 - k_i^2) K(k_i) + k_i^2 B(k_i).$$

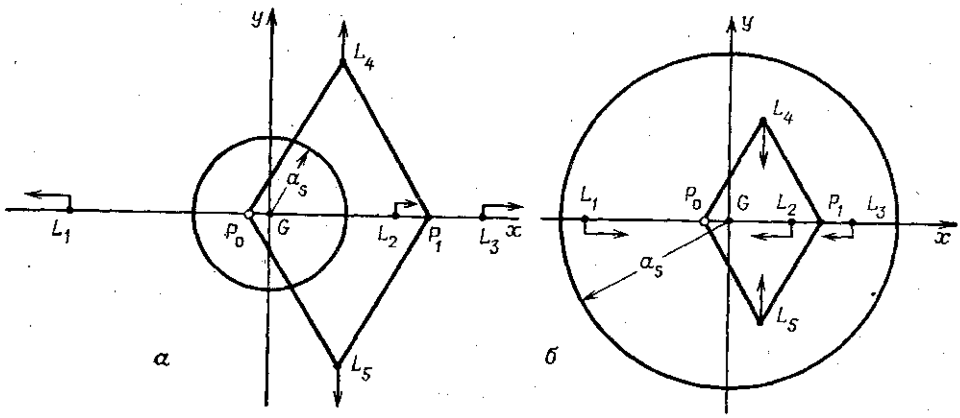
Модуль эллиптических интегралов в (25) определяется формулой

$$k_i = \begin{cases} a_s/\sigma_i, & a_s < \sigma_i, \\ \sigma_i/a_s, & a_s > \sigma_i. \end{cases} \tag{26}$$

Из (25) видно, что

$$\operatorname{sign} \delta x_i = \begin{cases} +\operatorname{sign} \alpha_i, & a_s < \sigma_i, \\ -\operatorname{sign} \alpha_i, & a_s > \sigma_i. \end{cases} \tag{27}$$

Последняя формула определяет направление смещения каждой из коллинеарных точек либрации для каждого из двух выделенных выше случаев расположения гауссова кольца.




Направления смещений точек либрации вследствие вековых возмущений от тела $P_s$ для внутреннего случая (*а*) и внешнего случая (*б*): $a_s < \min(\sigma_i, \rho_j)$, $i=1, 2, 3$; $j=4, 5$ (*а*); $a_s > \max(\sigma_i, \rho_j)$, $i=1, 2, 3$; $j=4, 5$ (*б*)

Для вековых возмущений в ординатах треугольных точек либрации соответствующие выражения имеют вид:

$$\delta y_j = \begin{cases} 2\mu_s E(k_j)/3\beta_j\rho_j^3 (1 - k_j^2), & a_s < \rho_j, \\ -2\mu_s k_j^2 B(k_j)/3\beta_j \rho_j^2 a_s (1 - k_j^2), & a_s > \rho_j, \end{cases} \tag{28}$$

где $\rho_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$ — радиус-вектор треугольной точки $L_j$ $(j=4, 5)$, а модуль эллиптических интегралов $k_j$ определяется формулой

$$k_j = \begin{cases} a_s/\rho_j, & a_s < \rho_j, \\ \rho_j/a_s, & a_s > \rho_j. \end{cases} \tag{29}$$

Из (28) легко выводится формула

$$\operatorname{sign} \delta y_j = \begin{cases} +\operatorname{sign} \beta_j, & a_s < \rho_j, \\ -\operatorname{sign} \beta_j, & a_s > \rho_j, \end{cases} \tag{30}$$

определяющая знаки смещений треугольных точек либрации в зависимости от знаков их ординат.

Соответствующие (27) и (30) направления смещений классических точек либрации указаны стрелками на приведенном ниже рисунке: отдельно для внутреннего ($a$) и внешнего ($б$) случаев расположения возмущающего гауссова кольца.

В заключение отметим, что, выбрав величины $x^{(0)}=\alpha_i+\delta x_i$ и $y^{(0)}=\beta_j+\delta y_j$ в качестве начальных приближений для корней $x=\alpha_i^*$ и $y=\beta_j^*$ трансцендентных уравнений (19) и (24) и затем уточнив значения этих корней с помощью какого-либо из итерационных способов, можно вычислить значения вековых возмущений в положениях точек либрации с любой заданной точностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Szebehely V. Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. Academic Press. N. Y., 1967, 16—21.
2. Farquhar R. W. Future missions for libration-point satellites.— A Publ. of Amer. Inst. of Aer. and Astr., 1969, 7, N 5, 52—56.
3. Huang Su-Shu. Very restricted four-body problem.— Astron. J., 1960, 65, N 6, 347.
4. Matas V. Perturbation of libration points of the restricted three-body problem due to gravitational and radiative influence of a fourth body.— Bull. of the Astr. Institutes of Czechoslovakia, 1969, 20, N 6, 322—326.
5. Лукьянов Л. Г. Влияние возмущающего тела на движение вблизи треугольных лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел. — Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1969, № 1, 63—74.
6. Fatou P. Sur le mouvement d'un point materiel dans un champs de gravitation fixe.— Acta Astronomica, ser. a, 1931, 2, 101.
7. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., 1961, 107—113.
8. Моисеев Н. Д. Об одной из упрощенных схем планетной системы.— ДАН СССР, 1936, I(X), № 2 (79), 62—64.
9. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964, 248—257.
10. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ОНТИ, 1936, 80—97.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., 1968, 114—116.



Поступила в редакцию
30.06.78