Здесь

$$E_{\pm}=\left(\frac{3mT\,\nu_{ff}^{0}\,\nu_{0}^{\pm 1}\,\omega^{1\mp 1}}{4e^{2}}\right)^{1/2} \text{ и } q'=q+1.$$

Таким образом, в зависимости от конкретного значения r перегревная неустойчивость, рассматривавшаяся в [1], может либо реализоваться, либо нет. Однако и в этом случае соответствующие эксперименты позволяют получить информацию о ν_{ff} — частоте межфононных соударений.

Автор глубоко признателен В. Л. Бонч-Бруевичу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрожжов Ю. П. Проводимость многодолинного полупроводника в греющем электромагнитном поле.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1977, **18**, № 5, с. 109—117.
2. Гуревич Л. Э., Коренблит И. Я. Электропроводность и гальваномагнитные коэффициенты полуметаллов и вырожденных полупроводников в сильном электрическом поле.— ЖЭТФ, 1963, **44**, с. 2150—2163.
3. Гуревич Л. Э., Гасымов Т. М. Разогрев фононов в полупроводниках в сильном электрическом поле и его влияние на электропроводность.— Физ. тв. тела, 1967, **9**, с. 106—118.
4. Грановский М. Я., Гуревич Ю. Г. Электроны и фононы в сильных электромагнитных полях. — ЖЭТФ, 1975, **68**, с. 126—136.
5. Гасымов Т. М. Теория гальваномагнитных явлений в полупроводниках и полуметаллах в условиях произвольного взаимного увлечения и разогрева носителей заряда и фононов.— В кн.: Некоторые вопросы экспериментальной и теоретической физики. Баку, 1977, с. 3—33.
6. Бонч-Бруевич В. Л., Дрожжов Ю. П. Нагрев электронов и особые точки Ван-Хова.— Вест. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1977, **18**, № 4, с. 115—116.
7. Займан Дж. Электроны и фононы. М., 1962, 488 с.
8. Борн М., Кунь Хуан. Динамическая теория кристаллических решеток. М., 1958, 488 с. Kleinman D. A. Anharmonic forces in GaP crystals.— Phys. Rev. 1960, **118**, p. 118—128.
9. Генкин Г. М., Файн В. М. Вклад ангармонизма колебаний кристаллической решетки в нелинейные свойства кристалла.— ЖЭТФ, 1965, **49**, с. 118—124. Генкин Г. М., Файн В. М., Ящин Э. Г. Нелинейные свойства кристаллической решетки.— Физ. тв. тела, 1966, **8**, с. 3312—3320.
10. Хэсс М. Решеточное отражение. В кн.: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$. М., 1970, с. 13—27.
11. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М., 1975, 400 с.

Поступила в редакцию
11.10.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, т. 21, № 5

УДК 530.12:531.51

В. И. АНТОНОВ

БИЛОКАЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

1. Введение. В последние годы, в основном в связи с развитием канонического формализма общей теории относительности (ОТО), многими авторами была показана необходимость последовательного рассмотрения систем отсчета при решении различных задач. В конечном счете, эта необходимость обусловлена существованием принципа локальной эквивалентности, или ненаблюдаемости гравитационного поля при локальных экспериментах в свободно падающей системе.

Монадный способ задания системы отсчета состоит в фиксации конгруэнции времениподобных линий. При этом касательные векторы τ вовсе не обязаны представлять собой 4-скорости частиц некоторой сплошной среды. Реальный наблюдатель всегда является более или менее локальным. Поэтому, вообще говоря, монадная система отсчета относится к области математических понятий. Смысл же введения поля монад во всем пространстве-времени заключается в утверждении, что данный «квазилокальный» наблюдатель находится в системе отсчета (τ), если трубка мировых линий его точек входит в конгруэнцию линий вектора τ, а динамическая эволюция всегда присущих «квазилокальному» наблюдателю опорных направлений определяется относительным движением мировых линий системы отсчета (τ) на внешней границе мировой трубки наблюдателя.

Альтернативным способом описания системы отсчета является «концепция одиночного наблюдателя» [1]. Система отсчета в этом случае задается лишь одной мировой линией, непосредственно представляющей движение (локального) наблюдателя. Получение наблюдаемых в этой трактовке системы отсчета обеспечивается выделением определенного класса кривых (например, пространственноподобных или изотропных геодезических), по которым производится перенос значений величин на базисную мировую линию, а также заданием вида переноса вдоль этих кривых (например, параллельного переноса).

Любой транслятор переноса, не меняющего скаляр, можно представить в виде [2]:

$$t_{\mu\mu'}(x, x') = g^{(\alpha)}_{\mu'}(x')\,\widetilde{g}_{\mu(\alpha)}(x), \tag{1}$$

где $g^{(\alpha)}_{\mu'}(x')$ — произвольная тетрада в исходной точке x', а $\widetilde{g}^{(\alpha)}_{\mu}(x)$ — та же тетрада, перенесенная в точку x. В дальнейшем условимся считать штрихованные индексы относящимися к точке x'. Тогда из (1) следует, что $t_{\mu\mu'}$ представляет собой двухточечный тензор (зависящий также от вида кривой переноса), преобразующийся по векторному закону как в точке x, так и в точке x', инвариантный относительно поворотов тетрад (поскольку эти повороты согласованы переносом) и удовлетворяющий следующим равенствам:

$$t_{\mu\mu'}\,t_{\nu\nu'}\,g^{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu}, \quad t_{\mu\mu'}\,t_{\nu\nu'}\,g^{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}. \tag{2}$$

Последние соотношения наводят на мысль использовать в качестве потенциалов гравитационного поля двухточечные величины типа транслятора (1), которые мы назовем *бипотенциалами* гравитационного поля и обозначим $g_{\mu\mu'}(x, x')$. Если фиксировать «опорную» точку x', то получающиеся при этом характеристики гравитационного поля зависят от x' и представляют собой, таким образом, *относительные* характеристики. Однако билокальная формулировка ОТО оказывается не столь тесно связанной с концепцией одиночного наблюдателя. Заметим также, что эта формулировка не эквивалентна тетрадной формулировке ОТО. Действительно, пусть имеется поле бипотенциала $g_{\mu\mu'}(x, x')$. Тогда для любой пары точек существует бесчисленное множество тетрад, представляющих бипотенциал в этих точках в виде (1). Но уже для трех точек вследствие искривленности пространства-времени, вообще говоря, не существует представления трех значений бипотенциала в этих точках через три тетрады по правилу (1). Тем более нельзя, вообще говоря, указать *поле* тетрад, которое по правилу (1) соответствует *полю* бипотенциала. Впрочем, в настоящей работе мы ограничимся случаем фиксированной «опорной» точки, что равносильно тетрадному формализму с оговоркой об инвариантности бипотенциала при тетрадных поворотах.

2. Уравнения Эйнштейна. Тензор энергии-импульса. Простейший лангранжиан гравитационного поля относительно «опорной» точки x', не содержащий вторых производных бипотенциала, имеет вид:

$$\mathfrak{L}_g(x, x') = (\mathfrak{J}/2\varkappa)(\delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu - \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu) g^{\alpha'\beta'} g^\mu_{\alpha';\rho} g^\nu_{\beta';\sigma}, \qquad (3)$$

где

$$\mathfrak{J} = \sqrt{-g(x)}, \quad g^\mu_{\alpha';\nu} = g^\mu_{\alpha',\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) g^\rho_{\alpha'}.$$

Заметим, что $\mathfrak{L}_g(x, x')$ с точностью до дивергенции пропорционален скалярной кривизне $\mathrm{R} = \mathrm{R}^{\mu\nu}_{..\mu\nu}(x)$. Варьирование по бипотенциалу удобно производить, не расписывая явно ковариантные производные в (3), по формулам, приведенным в монографии [3] (формула 2.2.22). В результате получим уравнения Эйнштейна:

$$0 = \frac{\delta \mathfrak{L}_t}{\delta g^\mu_{\alpha'}} = -\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{J} g^{\alpha'}_\nu \mathrm{G}^\nu_\mu - \varkappa \mathfrak{T}^{\alpha'}_\mu). \qquad (4)$$

Здесь

$$\mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}_g + \mathfrak{L}_f, \quad \mathrm{G}^\nu_\mu = \mathrm{R}^\nu_\mu - (1/2)\delta^\nu_\mu \mathrm{R},$$

а билокальный тензор энергии-импульса негравитационных полей связан с их локальным симметричным тензором равенством:

$$\mathfrak{T}^{\alpha'}_\mu = \frac{\delta \mathfrak{L}_f}{\delta g^\mu_{\alpha'}} = \mathfrak{T}^\nu_\mu(x) g^{\alpha'}_\nu(x, x'). \qquad (5)$$

Переходя к теореме Нетер, заметим, что слабый вариант уравнения Нетер имеет в нашем случае вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_t}{\delta A_{B,\mu}} a_B|^\nu_\rho \cdot \xi^\rho\right)\right] = 0, \qquad (6)$$

где A_B — потенциалы полей, $\xi^\rho(x)$ — бесконечно малое изменение координат x^ρ. Естественно допустить, что $\xi^\rho(x)$ генерируется произвольной вариацией координат в «опорной» точке x':

$$\xi^\mu(x) = g^\mu_{\mu'}(x, x')\eta^{\mu'}(x'). \qquad (7)$$

Полагая $A_B = g^\mu_{\alpha'}$, мы получим тогда следующее выражение (отбросив произвольный вектор $\eta(x')$):

$$\mathfrak{W}^{\mu\nu}_{\alpha'}(x, x') = -\mathfrak{M}^{\nu\mu}_{\alpha'}(x, x') = \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta g^\rho_{\beta',\mu}} g^\rho_{\alpha'} g^\nu_{\beta'} =$$

$$= \frac{\mathfrak{J}}{\varkappa}[g^\mu_{\beta';\rho} g^{\nu\beta'} g^\rho_{\alpha'} + g^\rho_{\beta';\rho}(g^{\mu\beta'} g^\nu_{\alpha'} - g^{\nu\beta'} g^\mu_{\alpha'})]. \qquad (8)$$

В силу антисимметричности полученного таким образом суперпотенциала величина

$$\mathbf{w}^\mu_{\alpha'}(x, x') = \mathfrak{M}^{\nu\mu}_{\alpha',\nu}$$

сохраняется тождественно; однако, как нетрудно проверить, существует *слабое* равенство

$$\mathbf{w}^{\mu}_{\alpha'}(x, x') \doteq \mathfrak{T}^{\mu}_{\alpha'} + \Theta^{\mu}_{\alpha'}, \tag{9}$$

где $\mathfrak{T}^{\mu}_{\alpha'}$ соответствует (5), а билокальный тензор $\Theta^{\mu}_{\alpha'}$ имеет вид:

$$\Theta^{\mu}_{\alpha'}(x, x') = -g^{\mu}_{\alpha'}\mathfrak{L}_g + \frac{\mathfrak{I}}{\varkappa}\left[g^{\mu}_{\beta'}(g^{\nu}_{\alpha';\rho}\, g^{\rho\beta'}{}_{;\nu} - \right.$$
$$- g^{\nu}_{\alpha';\nu}\, g^{\rho\beta'}{}_{;\rho}) + g^{\nu}_{\alpha'}(g^{\mu}_{\beta';\rho}\, g^{\rho\beta'}{}_{;\nu} -$$
$$\left. - g^{\mu}_{\beta';\nu}\, g^{\rho\beta'}{}_{;\rho}) + g^{\nu}_{\beta'}\, g^{\rho\beta'}{}_{;\rho}\, g^{\mu}_{\alpha';\nu}\right]. \tag{10}$$

Поскольку $\mathbf{w}^{\mu}_{\alpha',\mu} = 0$, то, проводя обычные рассуждения, приходим к выводу, что вектор

$$P_{\alpha'}(x') = \int_{\Sigma} \mathbf{w}^{\mu}_{\alpha'}(x, x')\, dS_{\mu}(x) \tag{11}$$

не зависит от выбора трехмерной гиперповерхности Σ. Так как существует слабое равенство (9), то естественно отождествить $P_{\alpha'}$ с вектором энергии-импульса полной системы, отнесенным к «опорной» точке x'. В этом случае тензор (10) следует трактовать, как тензор энергии-импульса гравитационного поля относительно «опорной» точки.

3. Референционный перенос. Как упоминалось во введении, учет движения наблюдателя позволяет явно выделить те степени свободы гравитационного поля, которые обязаны существованием системе отсчета. В применении к каноническому формализму ОТО в метрическом подходе такое выделение было произведено в [4]. Естественно с самого начала учитывать системы отсчета также и в билокальной формулировке. Это приводит к следующей конкретизации вида переноса при построении бипотенциала.

Пусть имеется некоторая монадная система отсчета (τ). Тогда метрику $g_{\mu\nu}(x)$ можно представить в виде [5, 6]

$$g_{\mu\nu}(x) = \tau_{\mu}(x)\tau_{\nu}(x) - b_{\mu\nu}(x), \tag{12}$$

где $b_{\mu\nu}$ представляет собой симметричную метрику локального трехмерного пространства, и $\tau^{\mu} b_{\mu\nu} = 0$. Будем говорить, что вектор A^{μ} претерпевает *референционный перенос* в системе отсчета (τ) вдоль некоторой кривой $x = x(u)$, если вдоль этой кривой справедливо равенство:

$$\frac{DA^{\mu}}{du} = A_{\nu}\left(\tau^{\nu}\frac{D\tau^{\mu}}{du} - \tau^{\mu}\frac{D\tau^{\nu}}{du}\right). \tag{13}$$

Нетрудно установить, что автоматически переносятся референционно вектор τ и трехмерная метрика b и что скаляр при переносе (13) не меняется. Отсюда следует, что любой пространственный вектор h $(h_{\mu}\tau^{\mu} = 0)$ остается при переносе (13) пространственным. Интересно также отметить, что при переносе вдоль линии из конгруэнции (τ) референционный перенос совпадает с переносом Ферми — Уолкера.

Далее, референционный перенос пространственного вектора h совпадает с параллельным переносом этого вектора в проекции на локальное трехмерное пространство:

$$-b^{\nu}_{\mu}\frac{Dh_{\nu}}{du} = 0.$$

Наконец, транслятор референционного переноса имеет вид:

$$g_{\mu\mu'}(x, x') = \tau_\mu(x)\tau_{\mu'}(x') - b_{\mu\mu'}(x, x'), \tag{14}$$

причем справедливы равенства $\tau^\mu b_{\mu\mu'} = 0$, $\tau^{\mu'} b_{\mu\mu'} = 0$. Заметим, что вид билокального потенциала (14) совершенно аналогичен виду метрического тензора в (12), т. е. перенос (13) реализует монадный подход в билокальном формализме ОТО.

4. Импульс и энергия в монадном подходе. Аналогично случаю метрической формулировки ОТО введение системы отсчета позволяет дать физическую интерпретацию формул, полученных в § 2.

Лагранжиан (3) с учетом (14) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_g(x, x') &= (\mathfrak{I}/2\varkappa)(D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - D^2 + \\ &+ A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + 2A^{\mu\nu} b^{\alpha'}_\nu \dot{b}_{\mu\alpha'} + 2F_\mu b^{\mu\alpha'} \nabla^+_\nu b^\nu_{\alpha'} + \\ &+ (\nabla^+_\mu b^\nu_{\alpha'}) \nabla^+_\nu b^{\mu\alpha'} - (\nabla^+_\mu b^{\mu\alpha'}) \nabla^+_\nu b^\nu_{\alpha'}), \end{aligned} \tag{15}$$

где $D_{\mu\nu}(x)$ представляет собой тензор скоростей деформаций, $A_{\mu\nu}(x)$ — тензор угловой скорости вращения, $F_\mu(x)$ — взятый с обратным знаком вектор ускорения системы отсчета (τ) относительно локально геодезической системы, имеющей равную нулю трехмерную скорость в системе (τ); ∇^+_μ является оператором ковариантного дифференцирования в локальном трехмерном пространстве (см. [4, 6]). Здесь и далее точка означает производную Ли по направлению τ^μ; тогда, например,

$$D_{\mu\nu}(x) = -(1/2)(b^{\alpha'}_\mu \dot{b}_{\nu\alpha'} + b^{\alpha'}_\nu \dot{b}_{\mu\alpha'}), \quad F_\mu = \dot{\tau}_\mu.$$

Отметим, что (15) с точностью до дивергенции оказывается равным локальному лагранжиану $\bar{\mathfrak{L}}_g(x)$, примененному в [4] для построения канонического формализма ОТО:

$$\bar{\mathfrak{L}}_g(x) = \mathfrak{L}_g(x, x') + \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{\tau}_\mu}\right)_{,\mu}.$$

Далее, согласно п. 2, энергия гравитационного поля представляет собой скаляр, отнесенный к «опорной» точке и равный

$$\tau^{\alpha'} \int_\Sigma \Theta^\mu_{\alpha'} dS_\mu = \int_\Sigma \varepsilon(x, x') d^3x, \tag{16}$$

где

$$\varepsilon(x, x') = \tau^{\alpha'} \Theta^\mu_{\alpha'} \tau_\mu.$$

Нетрудно найти, что для относительной плотности энергии гравитационного поля $\varepsilon(x, x')$ справедливо выражение

$$\varepsilon(x, x') = \dot{\tau}_\mu \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{\tau}_\mu} + \dot{b}_{\mu\alpha'} \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{b}_{\mu\alpha'}} - \mathfrak{L}_g, \tag{17}$$

из которого можно сделать вывод, что энергия совпадает с гамильтонианом в смысле слабого равенства.

С другой стороны, помимо (17), можно найти, что

$$\varepsilon(x, x') = \dot{x}^\mu \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{x}^\mu} + \dot{\tau}_\mu \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{\tau}_\mu} + A_{\mu\nu} \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta A_{\mu\nu}} + \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \dot{\tau}_\mu}\right)_{,\mu}. \tag{18}$$

Первый член в правой части (18), равный $-(\mathfrak{I}/\varkappa)\tau^\mu\tau^\nu G_{\mu\nu}$ и не зависящий от x', совпадает с гамильтоновой связью в каноническом формализме ОТО, второй и четвертый члены представляют собой энергию ускоренного, а третий член — энергию вращательного движения системы отсчета.

Вектор энергии-импульса полной системы в «опорной» точке x' согласно (11) равен

$$P_{\mu'}(x') = \int\limits_{\Sigma} \mathfrak{M}^{\nu\mu}_{\mu',\nu}\, dS_\mu = \oint\limits_{\partial\Sigma} \mathfrak{M}^{\mu\nu}_{\mu'}\, \tau_\nu\, d\sigma_\mu, \qquad (19)$$

где $d\sigma_\mu$ — элемент площади двумерной границы $\partial\Sigma$. Здесь мы использовали, как и в (16), специальный выбор гиперповерхности интегрирования Σ (что не меняет результата ввиду независимости $P^{\mu'}$ от выбора Σ). Учитывая (8) и (14), получаем для вектора $P_{\mu'}$ выражение:

$$P_{\mu'}(x') = \tau_{\mu'} \oint\limits_{\partial\Sigma} \frac{\delta\,\mathfrak{L}_g}{\delta\,\dot{\tau}_\mu}\, d\sigma_\mu + b_{\mu'\nu'} \oint\limits_{\partial\Sigma} \frac{\delta\,\mathfrak{L}_g}{\delta\,\dot{b}_{\mu\nu'}}\, d\sigma_\mu. \qquad (20)$$

Таким образом, полная энергия и полный импульс имеют вид поверхностных интегралов (заметим, что подынтегральные выражения представляют собой канонические импульсы, сопряженные соответственно временной и пространственной частям бипотенциала). Первый интеграл в (20) является скаляром, отнесенным к точке x', и имеет смысл полной энергии, тогда как второй интеграл (с обратным знаком) — полного трехмерного импульса системы.

5. Поле Шварцшильда. Рассмотрим (20) для поля Шварцшильда в той системе отсчета, которую обычно называют «центральной» или «неподвижной»:

$$\tau_\alpha = (1 - 2\mu/r)^{1/2}\, \delta^0_\alpha,$$

где $\mu = \gamma M/c^2$. В ней $D_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} = 0$, и второй интеграл в (20), т. е. полный импульс поля Шварцшильда, равен нулю независимо от положения «опорной» точки. Выбирая для расчета квазидекартову систему координат, найдем, что полная энергия поля Шварцшильда равна

$$E(x') = \frac{1}{\varkappa} \oint\limits_{\partial\Sigma} b^{ij'}\, (\nabla^{+}_{k}\, b^{k}_{j'})\, d\sigma_i. \qquad (21)$$

Пусть «опорная» точка x' отнесена на бесконечность. Ясно, что в силу сферической симметрии имеет место своеобразное вырождение по точкам x' на бесконечности. Предположим, что путь переноса также учитывает симметрию системы, а именно, что он слагается из смещений вначале по траектории изометрии на бесконечности, а затем — по кратчайшей геодезической, проходящей через текущую точку x. Установив таким образом путь переноса, без труда найдем, что пространственная часть бипотенциала в квазидекартовых координатах равна выражению

$$b^{ij'}(x, \infty) = \delta^{ij'} + [(1 - 2\mu/r)^{1/2} - 1]\, x^i x^{j'}/r^2. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим, что полная энергия поля Шварцшильда в «центральной» системе отсчета относительно бесконечно удаленной точки равна

$$E = \lim_{R\to\infty} \oint \frac{2\mu}{\varkappa R^2} \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{8\pi\mu}{\varkappa} = Mc^2.$$

6. Заключение. Попытки подойти к проблеме энергии-импульса гравитационного поля на основе введения двухточечных величин предпринимались уже давно [2, 7—9], исследования в этом направлении продолжаются и в настоящее время [10, 11]. Во всех этих работах, однако, использовались лишь трансляторы параллельного переноса по геодезическим, причем за основу бралась в основном метрическая формулировка ОТО (а также вариант двуметрического формализма в работах Рылова [8]). Нам кажется, что более корректно опираться на билокальную формулировку ОТО в сочетании с явным выделением системы отсчета, что приводит к необходимости использовать референционный перенос вместо параллельного.

Связь вида путей переноса со степенью симметрии пространства-времени не является неожиданной, так как вследствие зависимости физических величин от «опорной» точки x' неизбежно возникает вопрос о «классах эквивалентности» опорных точек. Физические величины, вообще говоря, должны быть функциями не *точки* x', а целого *класса эквивалентности*. Этот вопрос, однако, как и вопрос о применимости билокального формализма для квантования гравитации, требует самостоятельного изучения.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову и С. В. Румянцеву за полезные дискуссии и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мицкевич Н. В., Рибейро Теодоро М. Естественная калибровка тетрадного поля и гравитационная энергия.— ЖЭТФ, 1969, **56**, вып. 3, с. 954—962.
2. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963.
3. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
4. Антонов В. И., Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. Монадный метод и канонический формализм общей теории относительности.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1976, вып. 7, с. 34—44.
5. Мицкевич Н. В., Захаров В. Н. Трансформационные свойства общековариантных наблюдаемых.— ДАН СССР, 1970, **195**, с. 321.
6. Зельманов А. Л. Ортометрическая форма монадного формализма и ее отношение к хронометрическим и кинеметрическим инвариантам.— ДАН СССР, 1976, **227**, с. 78—81.
7. Synge J. L. Tensorial conservation laws in general relativity. In: Les théories relativistes de la gravitation. Paris: Centre Nat. Rech. Sci., 1962.
8. Рылов Ю. А. Об относительной локализации гравитационного поля.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1962, № 5, с. 70.
9. Сбытов Ю. Г. Использование реперов для получения законов сохранения в общей теории относительности.— В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, 1967, с. 132.
10. Lathrop J. D. On Syngés covariant conservation laws for general relativity.— Ann. of. Phys., 1975, **95**, N 2, p. 508—517.
11. Oliver M. A. The mass-energy of a finite body in general relativity.— Gen. Relat. and Gravit., 1977, **8**, N 12, p. 975—985.

Поступила в редакцию
19.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, т. 21, № 5

УДК 539.12.01

А. П. ДЕМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА, М. ЧАЙЧИАН (Финляндия)

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. V. ГРУППА ВЕЙЛЯ

1. В предыдущих статьях [1—4] рассматривались вопросы, касающиеся инвариантных операторов неоднородных групп с классическими однородными подгруппами. В данной статье рассмотрена аналогичная задача для группы Вейля $W(p, q)$ произвольной размерности.