принимались уже давно [2, 7—9], исследования в этом направлении продолжаются и в настоящее время [10, 11]. Во всех этих работах, однако, использовались лишь трансляторы параллельного переноса по геодезическим, причем за основу бралась в основном метрическая формулировка ОТО (а также вариант двуметрического формализма в работах Рылова [8]). Нам кажется, что более корректно опираться на билокальную формулировку ОТО в сочетании с явным выделением системы отсчета, что приводит к необходимости использовать референционный перенос вместо параллельного.

Связь вида путей переноса со степенью симметрии пространства-времени не является неожиданной, так как вследствие зависимости физических величин от «опорной» точки x' неизбежно возникает вопрос о «классах эквивалентности» опорных точек. Физические величины, вообще говоря, должны быть функциями не *точки* x', а целого *класса эквивалентности*. Этот вопрос, однако, как и вопрос о применимости билокального формализма для квантования гравитации, требует самостоятельного изучения.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову и С. В. Румянцеву за полезные дискуссии и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мицкевич Н. В., Рибейро Теодоро М. Естественная калибровка тетрадного поля и гравитационная энергия.— ЖЭТФ, 1969, **56**, вып. 3, с. 954—962.
2. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963.
3. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
4. Антонов В. И., Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. Монадный метод и канонический формализм общей теории относительности.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1976, вып. 7, с. 34—44.
5. Мицкевич Н. В., Захаров В. Н. Трансформационные свойства общековариантных наблюдаемых.— ДАН СССР, 1970, **195**, с. 321.
6. Зельманов А. Л. Ортометрическая форма монадного формализма и ее отношение к хронометрическим и кинеметрическим инвариантам.— ДАН СССР, 1976, **227**, с. 78—81.
7. Synge J. L. Tensorial conservation laws in general relativity. In: Les théories relativistes de la gravitation. Paris: Centre Nat. Rech. Sci., 1962.
8. Рылов Ю. А. Об относительной локализации гравитационного поля.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1962, № 5, с. 70.
9. Сбытов Ю. Г. Использование реперов для получения законов сохранения в общей теории относительности.— В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, 1967, с. 132.
10. Lathrop J. D. On Syngés covariant conservation laws for general relativity.— Ann. of. Phys., 1975, **95**, N 2, p. 508—517.
11. Oliver M. A. The mass-energy of a finite body in general relativity.— Gen. Relat. and Gravit., 1977, **8**, N 12, p. 975—985.

Поступила в редакцию
19.06.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1980, т. 21, № 5

УДК 539.12.01

А. П. ДЕМИЧЕВ, Н. Ф. НЕЛИПА, М. ЧАЙЧИАН (Финляндия)

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУПП. V. ГРУППА ВЕЙЛЯ

1. В предыдущих статьях [1—4] рассматривались вопросы, касающиеся инвариантных операторов неоднородных групп с классическими однородными подгруппами. В данной статье рассмотрена аналогичная задача для группы Вейля $W(p, q)$ произвольной размерности.

Группа Вейля является группой движений псевдоевклидова пространства и равномерных расширений по всем осям координат: $W(p, q) \equiv (SO(p, q) \otimes D) \cdot T$, где знаком $\cdot$ обозначено полупрямое произведение. Из структуры группы (прямое произведение) видно, что дилатации с вращениями коммутируют. Поэтому по сравнению с неоднородной псевдо-ортогональной группой новыми будут коммутационные соотношения P_ν с генератором дилатаций D:

$$[D, P_\nu] = -P_\nu. \tag{1}$$

2. Алгебра Ли $W(p, q)$ не удовлетворяет ни одному из достаточных условий существования только полиномиальных операторов [1]. Более того, как мы увидим ниже, $W(p, q)$ является примером групп, имеющих только рациональные инварианты. Поэтому остановимся кратко на определении рациональных инвариантов алгебры Ли [5].

Введем следующие понятия.

а) Универсальная обертывающая алгебра A алгебры Ли является алгеброй без делителей нуля [6], т. е. из условия

$$uv = 0 \ (u, v \in A)$$

следует либо $u=0$, либо $v=0$. Поэтому можно определить поле отношений $D(A)$, т. е. поле, элементы которого имеют вид uv^{-1} ($u, v \in A$, $v \neq 0$). Коммутаторы в поле отношений $D(A)$ можно вычислить, пользуясь формулой

$$[u, v^{-1}] \equiv uv^{-1} - v^{-1}u = -v^{-1}[u, v]\, v^{-1}. \tag{2}$$

б) Элементы поля отношений $D(A)$, коммутирующие со всеми генераторами группы, называются рациональными инвариантами.

в) Элемент g из универсальной обертывающей алгебры A называется относительным инвариантом алгебры Ли G, если

$$[F_j, g] = \lambda_j g \ (j = 1, \ldots, \dim G), \tag{3}$$

где F_j — генератор алгебры Ли G; $\dim G$ — размерность группы; λ_j — числовой множитель.

Покажем, что принадлежность u и v относительным инвариантам с одинаковым λ_j является необходимым и достаточным условием инвариантности uv^{-1}.

Действительно, используя (2), находим

$$[F_j, uv^{-1}] = [F_j, u]\, v^{-1} - uv^{-1}[F_j, v]\, v^{-1} = \lambda_j uv^{-1} - uv^{-1}\lambda_j vv^{-1} = 0.$$

Обратно, из требования инвариантности uv^{-1} получаем

$$[F_j, u]\,[F_j, v]^{-1} = uv^{-1}.$$

Из единственности представления элемента поля $D(A)$ в виде отношения элементов универсальной обертывающей алгебры следует требуемое утверждение. Для нахождения числа инвариантных операторов можно воспользоваться методом, изложенным в [1, 5], с тем отличием, что в данном случае устанавливается изоморфизм центра поля отношений $D(A)$ центру алгебры рациональных функций. Однако в случае группы Вейля удобен другой путь, основанный на том, что задачу нахождения числа инвариантов группы $W(p, q)$ можно свести к задаче нахождения числа операторов Казимира ее псевдоортогональной неоднородной подгруппы $ISO(p, q)$. В самом деле, согласно сказанному, вместо нахождения абсолютных инвариантов можно искать относительные. Как мы покажем, относительные инварианты группы Вейля не содержат операторов дилатаций и являются абсолютными инвариантами группы $ISO(p, q)$. Следовательно, инвариантные операторы группы Вейля представляются в виде отношения операторов Казимира неоднородной псевдоортогональной подгруппы.

3. Перейдем к нахождению числа инвариантов.

Алгебра Ли $ISO(p, q)$ не может иметь относительных инвариантов, так как является производной подалгеброй [6]: $ISO(p, q) = [W(p, q), W(p, q)]$. Поэтому, чтобы доказать, что в относительные инварианты генератор дилатации не входит, достаточно показать, что невозможны равенства

$$[P_\mu, C_D] = 0 \tag{4}$$

$$[M_{\mu\nu}, C_D] = 0,$$

где элемент C_D универсальной обертывающей алгебры A_W содержит D.

Заметим, что переменная, соответствующая генератору дилатации D, не входит в матрицу M, а значит, и в систему уравнений в частных производных (определенных формулами (6) и (3) статьи [1]). Поэтому в C_D генератор дилатации может входить не более чем в первой степени, т. е.

$$C_D = C_{11} + bC_{21}DC_{22}, \tag{5}$$

где C_{11}, C_{21}, $C_{22} \in A_W$ и не включают в себя D. Из (4) и (5) получаем

$$[P_\mu, C_{11}] + b[P_\mu, C_{21}]DC_{22} + bC_{21}D[P_\mu, C_{22}] + bC_{21}P_\mu C_{22} = 0.$$

Приравнивая нулю члены с различными степенями D, находим

$$[P_\mu, C_{11}] + bC_{21}P_\mu C_{22} = 0,$$

$$b([P_\mu, C_{21}]DC_{22} + C_{21}D[P_\mu, C_{22}]) = 0.$$

Из этих равенств следует, что $b \neq 0$ только в случае

$$[P_\mu, C_{21}] = \pm C_{21}, \ [P_\mu, C_{22}] = \mp C_{22},$$

но это, как уже отмечалось, невозможно. Значит, $b=0$ и относительный инвариант $C_D \equiv C_{11}$ не зависит от генератора дилатаций D. Отсюда можно сделать вывод, что рациональные инварианты, если они существуют, конструируются только из операторов Казимира соответствующей подгруппы $ISO(p, q)$.

Покажем, что инвариантные операторы группы Вейля существуют, т. е. операторы Казимира C_i группы $ISO(p, q)$ являются относительными инвариантами генератора дилатаций. Для нахождения коммутаторов D с C_i воспользуемся тем, что операторы Казимира группы $ISO(p, q)$ однородны по P_μ (что можно показать, строя C_i методом расширения [7, 3]). Поэтому, учитывая (1), можно утверждать, что

$$[D, C_i] = m_i C_i, \ i = 1, \ldots, \left[\frac{p+q+1}{2}\right],$$

где m_i — степень однородности по P_μ.

Значит, из двух любых операторов Казимира C_i, C_j группы $ISO(p, q)$ после возведения их в необходимые степени k_i и k_j (так, чтобы $k_i m_i = k_j m_j$) можно получить рациональный инвариант группы $W(p, q)$.

Алгебраически независимых инвариантов будет на один меньше, чем операторов Казимира C_i соответствующей группы $ISO(p, q)$. Например, для C_i $\left(i = 1, \ldots, \left[\frac{p+q+1}{2}\right] - 1\right)$ можно в качестве знаменателей брать необходимые степени оставшегося $C_{\left[\frac{p+q+1}{2}\right]}$; тогда любой рациональный инвариант получается из этой совокупности рядом алгебраических операций.

Поскольку, согласно сказанному выше, полиномиальных инвариантов у группы Вейля нет, то число инвариантных операторов равно

$$\tau'_{W(p,q)} = \left[\frac{p+q-1}{2}\right]. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что, например, группы Вейля в двумерном пространстве вообще не имеют инвариантов, а группа $W(3)$ имеет рациональный инвариант, который согласно [3] записывается в виде

$$C = \frac{P^2}{(M\cdot P)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа *IGL* (*n*, *R*).— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1980, **21**, № 2, с. 3—7.
2. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. II. Группа *ISL* (*n*, *R*).— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1980, **21**, № 2, с. 7—10.
3. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. III. Группа *ISO* (*p*, *q*).— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1980, **21**, № 4, с. 23—27.
4. Дёмичев А. П., Нелипа Н. Ф., Чайчиан М. Инвариантные операторы неоднородных групп. IV. Унитарные и симплектические группы.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1980, **21**, № 4, с. 27—31.
5. Abellanas L., Martines Alonso L. A general setting for Casimir invariants.— J. Math. Phys., 1975, **16**, p. 1580—1584.
6. Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. М., 1947, с. 353.
7. Rosen J. Construction of invariants for Lee algebras of inhomogeneous pseudo-ortogonal and pseudo-unitari groups.— J. Math. Phys., 1968, **9**, 1305—1307.

Поступила в редакцию
17.05.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, т. 21, № 5

УДК 539.283:546.26—162

В. Н. ЛАЗУКИН, А. Н. ТЕРЕНТЬЕВСКИЙ, Ф. М. МУРЮМИН, В. А. ЛАПТЕВ, Ю. Н. БЕЛОУСОВ

ЭПР-СПЕКТР АЗОТА В ЕСТЕСТВЕННОЙ И ИСКУССТВЕННОЙ РЕШЕТКАХ АЛМАЗА

Имея достаточно простую структурную решетку, алмаз обладает уникальными свойствами, загадочность которых вот уже много лет подогревает исследовательский интерес к его тайнам. В самом деле, до настоящего времени со всей очевидностью не доказано, какова валентность углерода, образующего решетку алмаза, какие примеси (исключая азот) входят или могут входить в структурную композицию решетки алмаза, и многое другое. Спектроскопические методы исследований, в частности ЭПР, получившие значительное развитие в последнее время, внесли некоторую ясность в эти проблемы. Утверж-