ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 517.987

Н. В. ПЕСКОВ

О ФУНКЦИЯХ ГРИНА КЛАССИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Статистические явления в нелинейных системах, эволюция которых во времени описывается нелинейным волновым уравнением, изучались в [1—3]. В этих работах была замечена аналогия между статистическим описанием таких систем и квантовой теорией поля. В данной заметке эта аналогия будет рассмотрена с точки зрения исследования статистических свойств классических систем методом функций Грина [4]. Нашей целью является изложение алгоритма приближенного вычисления функций Грина бесконечномерной динамической системы гидродинамического типа, и мы не будем проводить строгое математическое обоснование производимых действий.

Пусть H — банахово пространство. Рассмотрим в H уравнение эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u, \quad u|_{t=0} = u_0 \in H, \quad L_0 : H \to H. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{U}_t^0$ — разрешающий оператор уравнения (1), $u(t) = \mathcal{U}_t^0 u_0$. $\mathcal{A}$ — алгебра непрерывных функционалов на H. Оператор $\mathcal{U}_t^0$ порождает оператор $\alpha_t^0 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, определяемый соотношением

$$\alpha_t^0 A(u_0) = A(\mathcal{U}_t^0 u_0), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пару $\{\mathcal{A}, \alpha_t^0\}$ называют динамической системой [5].

Пусть μ_0 — вероятностная мера на H; определим меру $\mu(t)$ как решение уравнения

$$\int \alpha_t^0 A(u_0)\, d\mu_0 = \int A(u_0)\, d\mu(t), \quad \mu(0) = \mu_0.$$

Отображение $A \to \omega(A) = \int A(u_0)\, d\mu(t)$ есть линейный положительный функционал на алгебре $\mathcal{A}$, норма которого равна единице; такие функционалы называются состояниями динамических систем. Если уравнение (1) гамильтоново, то требование стационарности состояния и устойчивости относительно малых вариаций гамильтониана выделяет состояния, удовлетворяющие условиям Кубо — Мартина — Швингера (KMS-состояния) [6]. Если ω — KMS-состояние, то можно ввести спектральную функцию $J_\eta(A, B)$, $\eta \in R$; $A, B \in \mathcal{A}$, и функцию Грина $G_E(A, B)$, $E \in C$, $\operatorname{Im} E \neq 0$, с помощью соотношений

$$\omega(\alpha_t A \cdot B) - \omega(A)\,\omega(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\eta t)\, J_\eta(A, B)\, d\eta, \tag{2}$$

$$G_E(A, B) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta (E - \eta)^{-1} J_\eta(A, B)\, d\eta. \tag{3}$$

Функции J_η и G_E определяют все статистические свойства системы [7].

Пусть вместе с (1) на H задано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u + g L_1 u, \quad u|_{t=0} = u_0' \in H, \quad g \in R, \tag{4}$$

$\mathcal{U}_t$ — разрешающий оператор уравнения (4), $u(t) = \mathcal{U}_t u_0'$. Оператор $\mathcal{U}_t$ порождает отображение $\alpha_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\alpha_t A(u_0') = A(\mathcal{U}_t u_0')$. Пусть $\{.,.\}$ — скобки Пуассона в $\mathcal{A}$. Предположим, что существует отображение $S : H \to H$, $Su_0' = u_0$, причем выполнено условие

$$\{\alpha_t A(u_0'), \alpha_t B(u_0')\} = \{\alpha_t^0 A(Su_0'), \alpha_t^0 B(Su_0')\}, \tag{5}$$

тогда отображение S называется каноническим.

Пусть ω — KMS-состояние динамической системы $\{\mathcal{A}, \alpha_t^0\}$; определим состояние ω^S динамической системы $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$ соотношением

$$\omega^S(A) = \omega(S^* A), \quad S^* A(u_0') = A(Su_0').$$

Можно доказать, что ω^S есть KMS-состояние системы $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$, причем справедлива формула

$$G_E^S(A, B) = G_E(S^* A, S^* B).$$

Предположим, что g в уравнении (4) мало и что преобразование S можно представить в виде ряда по степеням g:

$$S = S_0 + g S_1 + \ldots.$$

Тогда функцию G_E^S мы также можем представить в виде ряда

$$G_E^S(A, B) = G_E(A_0, B_0) + g G_E(A_1 B_0) + g G_E(A_0, B_1) + \ldots,$$

где $A_0 = S_0^* A$, $A_1 = S_1^* A$, $B_0 = S_0^* B$, $B_1 = S_1^* B, \ldots$.

Предположим, что система $\{\mathcal{A}, \alpha_t^0\}$ такова, что фукнции Грина вычисляются легко, тогда мы можем вычислить функции G_E^S с любым порядком точности по g.

Для иллюстрации алгоритма в данной заметке мы рассмотрим системы $\{\mathcal{A}, a_t^0\}$ и $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$, эволюция которых во времени описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - m^2 u, \quad u|_{t=0} = \varphi_0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \pi_0 \tag{6}$$

$$u = u(t, x); \quad t \in R, \quad x \in R^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - m^2 u - g u^3, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \pi, \quad g > 0. \tag{7}$$

Полагая, что g мало, мы вычислим функции G_E^S системы (7) с точностью до членов первого порядка по g.

Запишем уравнение (7) в гамильтоновой форме. Для этого введем функции

$$\Phi(t, x) = u(t, x), \quad \Pi(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x),$$

тогда из (7) получим систему уравнений Гамильтона

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta-m^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}-g\begin{pmatrix}0\\ \Phi^3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix} \tag{8}$$

с гамильтонианом

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\int(|\Delta\varphi|^2+m^2|\varphi|^2+\frac{1}{2}g|\varphi|^4+|\pi|^2)\,dx.$$

Соответственно, из (6) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta-m^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \pi_0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathscr{H}_0=\frac{1}{2}\int(|\nabla\varphi|^2+m^2|\varphi|^2+|\pi|^2)\,dx.$$

Существование и единственность решения задачи (8) доказаны в [8]. Точные результаты относительно гамильтоновой структуры уравнения (8) приведены в [9].

Пусть H — фазовое пространство систем (8), (9). $H=H_\varphi\oplus H_\pi$, где H_φ (соответственно H_π) — гильбертово пространство функций $\varphi(x)$ $(\pi(x))$ со скалярным произведением $<\varphi_1, \varphi_2>=\int((\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)+\varphi_1\varphi_2)dx$ $(<\pi_1, \pi_2>=\int\pi_1\pi_2dx)$. Симплектическая структура в H задается билинейной формой

$$\theta\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \pi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \pi_2\end{pmatrix}\right)=\int(\varphi_1\pi_2-\varphi_2\pi_1)\,dx.$$

$\mathscr{A}$ — алгебра непрерывных функционалов на H, в которой скобки Пуассона определены соотношением

$$\{A,B\}=\int\left(\frac{\delta A}{\delta\varphi}\frac{\delta B}{\delta\pi}-\frac{\delta A}{\delta\pi}\frac{\delta B}{\delta\varphi}\right)dx.$$

Определим на H оператор

$$L_0=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta-m^2 & 0\end{pmatrix}$$

и введем скалярное произведение

$$\left[\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \pi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \pi_2\end{pmatrix}\right]=\theta\left(L_0\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \pi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \pi_2\end{pmatrix}\right),$$

таким образом, H становится гильбертовым пространством. Оператор L_0 порождает однопараметрическую группу $\mathscr{U}_t^0$, $t\in R$ автоморфизмов пространства H, унитарную относительно формы $\{.\,,.\}$:

$$\mathscr{U}_t^0=\begin{pmatrix}\cos(t\sqrt{-\Delta+m^2}) & (\sqrt{-\Delta+m^2})^{-1}\sin(t\sqrt{-\Delta+m^2})\\ -\sqrt{-\Delta+m^2}\sin(t\sqrt{-\Delta+m^2}) & \cos(t\sqrt{-\Delta+m^2})\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\begin{pmatrix}\Phi_0\\ \Pi_0\end{pmatrix}=\mathscr{U}_t^0\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix}$ — решение системы (9).

Решения системы (8) с начальными условиями $\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix}$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_0\\ \Pi_0\end{pmatrix}-g\int_0^t\mathscr{U}_{t-\tau}^0*\begin{pmatrix}0\\ \Phi^3(\tau)\end{pmatrix}d\tau. \tag{10}$$

При достаточно малом g уравнение (10) можно решать методом последовательных приближений. Выбирая в качестве начального приближения функцию $\begin{pmatrix}\Phi_0\\ \Pi_0\end{pmatrix}$, получим

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \Pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_0\\ \Pi_0\end{pmatrix}-g\int_0^t \mathcal{U}^0_{t-\tau}*\begin{pmatrix}0\\ \Phi_0^3(\tau)\end{pmatrix}d\tau+\ldots.$$

Пусть заданы некоторые $\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix}\in H$, в работе [10] доказано существование таких $\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \pi_+\end{pmatrix}\in H$, что

$$\begin{pmatrix}\Phi(t,x;\varphi,\pi)\\ \Pi(t,x;\varphi,\pi)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\Phi_0(t,x;\varphi_+,\pi_+)\\ \Pi_0(t,x;\varphi_+,\pi_+)\end{pmatrix}$$

при $t\to\infty$ в норме, индуцируемой формой $[.,.]$. Преобразование S: $\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix}\to$ $\to\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \pi_+\end{pmatrix}$ задается формулой

$$\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \pi_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi\\ \pi\end{pmatrix}-g\int_0^\infty u^0_{-\tau}*\begin{pmatrix}0\\ \Phi^3(\tau)\end{pmatrix}d\tau. \tag{11}$$

Из работы [10] следует, что преобразование S является каноническим и переводит нелинейную систему $\{\mathcal{A},\ \alpha_t\}$ в линейную, $\{\mathcal{A},\alpha_t^0\}$, для которой KMS-состояние и функции Грина известны точно. Используя разложение S в ряд по g, мы можем приближенно вычислить функции Грина нелинейной системы.

Введем функции

$$\varphi(k)=\int\varphi(x)\exp(-ikx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\nu}}(a(k)+a^*(k)),$$

$$\pi(k)=\int\pi(x)\exp(-ikx)\,dx=-\frac{i\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}(a(k)-a^*(k)),$$

$$\nu=\sqrt{k^2+m^2}.$$

Пусть $A,B\in\mathcal{A}$ — линейные функционалы вида

$$A(a,a^*)=\int\alpha_1(k)\,a(k)\,dk+\int\alpha_2(k)\,a^*(k)\,dk,$$

$$B(a,a^*)=\int\beta_1(k)\,a(k)\,dk+\int\beta_2(k)\,a^*(k)\,dk.$$

Для вычисления функций G_E мы воспользуемся формулой, приведенной в работе [11]:

$$G_E(A,B)=\frac{i}{\beta}\,\omega(\{B,(E-\widehat{H}_0)^{-1}A\}),\quad \widehat{H}_0A=i\{\mathcal{H}_0,A\}. \tag{12}$$

Используя (12), (5), (3), получим

$$G_E^S(A,B)=\frac{1}{\beta}\int\left(\frac{\beta_1(k)\,\alpha_2(k)}{E-\nu}-\frac{\alpha_1(k)\,\beta_2(k)}{E+\nu}\right)dk+$$

$$+\frac{6gi}{\beta}\int\limits_0^\infty\int\Big[\frac{\alpha_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\alpha_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)\tau)}{E-\nu(k_2)}-\frac{\beta_2(k_2)\exp(-i\nu(k_2)\tau)}{E+\nu(k_2)}\right)+$$

$$+\frac{\beta_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\beta_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_2(k_2)\exp(-i\nu(k_2)\tau)}{E-\nu(k_2)}-\frac{\alpha_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)\tau)}{E+\nu(k_2)}\right)\Big]dk_1dk_2d\tau+O(g^2).$$

$$J_\eta^S(A,B)=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{\eta}(\delta(\eta-\nu)\beta_1(k)\alpha_2(k)-\delta(\eta+\nu)\alpha_1(k)\beta_2(k))\,dk+$$

$$+\frac{6gi}{\beta}\int\limits_0^\infty\int\Big[\frac{\alpha_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\alpha_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}\times$$

$$\times\frac{1}{\eta}(\delta(\eta-\nu(k_2))\beta_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)\tau)-\delta(\eta+\nu(k_2))\beta_2(k_2)\exp(-i\nu(k_2)\tau))+$$

$$+\frac{\beta_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\beta_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}\times$$

$$\times\frac{1}{\eta}(\delta(\eta-\nu(k_2))\alpha_2(k_2)\exp(-i\nu(k_2)\tau)-\delta(\eta+\nu(k_2))\alpha_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)\tau))\Big]\times$$

$$\times dk_1dk_2d\tau+O(g^2).$$

Затем из (2) находим корреляционную функцию линейных функционалов

$$\omega^S(\alpha_tA;B)-\omega^S(A)\,\omega^S(B)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{\nu}(\alpha_2(k)\beta_1(k)\exp(i\nu t)+\alpha_1(k)\beta_2(k)\exp(-i\nu t))\,dk+$$

$$+\frac{6gi}{\beta}\int\limits_0^\infty\int\Big[(\beta_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)(t+\tau))+\beta_2(k_2)\exp(-i\nu(k_2)(t+\tau)))\times$$

$$\times\frac{\alpha_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\alpha_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\nu(k_2)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}+$$

$$+\frac{\beta_1(2k_1+k_2)\exp(i\nu(2k_1+k_2)\tau)-\beta_2(2k_1+k_2)\exp(-i\nu(2k_1+k_2)\tau)}{4\nu^2(k_1)\nu(k_2)\sqrt{\nu(2k_1+k_2)\nu(k_2)}}\times$$

$$\times(\alpha_2(k_1)\exp(-i\nu(k_2)(t+\tau))+\alpha_1(k_2)\exp(i\nu(k_2)(t+\tau)))\Big]dk_1dk_2d\tau+$$

$$+O(g^2),\quad \beta=\mathrm{const}.$$

В заключение отметим, что на основании работы [12] аналогичное рассмотрение можно провести для системы с эволюцией, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u-m^2u-gu^2,\quad u|_{t=0}=\varphi,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\pi.$$

Приведем корреляционную функцию линейных функционалов для такой системы:

$$\omega^S(\alpha_t A\cdot B)-\omega^S(A)\,\omega^S(B)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{\nu}\left(\beta_1(k)\,\alpha_2(k)\exp(i\nu t)+\alpha_1(k)\,\beta_2(k)\exp(-i\nu t)\right)dk+$$

$$+\frac{g^2}{\beta}\int_0^\infty\int_0^{t_1}\int\left(\beta_1(k_1+k_2)\exp(i\nu(k_1+k_2)\tau_1)\right)-\beta_2(k_1+k_2)\exp(-i\nu(k_1+k_2)\tau_2)\times$$

$$\times\frac{\alpha_1(k_1+k_2)\exp(i\nu(k_1+k_2)\tau_2)-\alpha_2(k_1+k_2)\exp(-i\nu(k_1+k_2)\tau_2)}{2\nu(k_1+k_2)\,\nu^2(k_2)\,\nu(k_1)}\times$$

$$\times\left(\frac{\exp(i(\nu(k_1)+\nu(k_2))(\tau_1-\tau_2-t))}{\nu(k_1)+\nu(k_2)}+\frac{\exp(i(\nu(k_2)-\nu(k_1))(\tau_1-\tau_2-t))}{\nu(k_2)-\nu(k_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(i(\nu(k_1)-\nu(k_2))(\tau_1-\tau_2-t))}{\nu(k_2)-\nu(k_1)}+\frac{\exp(-i(\nu(k_1)+\nu(k_2))(\tau_1-\tau_2-t))}{\nu(k_1)+\nu(k_2)}\right)\times$$

$$\times\,dk_1dk_2d\tau_1d\tau_2+\ldots.$$

Автор благодарен профессору А. А. Арсеньеву за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадомцев Б. Б., Конторович В. М. Теория турбулентности в гидродинамике и плазме.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, **17**, № 4, с. 511—540.
2. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. Метод гамильтонова формализма для стратифицированных сред.— Тр. VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике, 1975 г., ч. 1. М., 1976, с. 119—128.
3. Kentzer CZ. P. Acoustical theory of turbulence.— Arch. of Mech., 1974, **26**, N 5, p. 805.
4. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. М., 1961.
5. Kadison R. V. Transformations of states in operator theory and dynamics.— Topology, 1965, **3**, Suppl. 2, p. 177.
6. Gallavoti G., Verboven E. On the classical KMS boundary conditions.— Nuovo Cim., 1975, **28B**, N 1, p. 274.
7. Hanckowiac I. Statistical methods in quantum field theory.— J. Math. Phys., 1975, **16**, N 7, p. 1524.
8. Segal I. Non-linear semi-groups.— Ann. Math., 1963, **78**, p. 339.
9. Chernoff P. R. Properties of infinite dimensional Hamiltonian system.— Lect. notes in Math., 1974, p. 425.
10. Morawetz C. S., Strauss W. A. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation.— Comm. Pure Appl. Math., 1972, **25**, p. 1.
11. Арсеньев А. А. О состояниях Кубо—Мартина—Швингера для классических динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.— Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 56.
12. Chadam. Asymptotics for $\Box\ u=m^2u+G(x,\ t,\ u,\ u_x,\ u_t)$.— Ann. Scuola Norm. Sup., Ser. 3, 1972, **26**, N 1.

Поступила в редакцию
07.12.78