3. Abrams R. L. Coupling losses in hollow waveguide laser resonators.— IEEE J. Quantum Electronics, 1972, QE-8, p. 838—843.
4. Gloge D. Weakly guiding fibers.— Applied Optics, 1971, 10, p. 2252—2258.
5. Когельник Х., Ли Т. Резонаторы и световые пучки лазеров.— Тр. Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1966, 54, с. 95—113.
6. Белов А. В., Бубнов М. М., Гурьянов А. Н. и др. Волоконный световод с малыми потерями с сердцевиной из кварцевого стекла и с боросиликатной оболочкой.— Письма в ЖТФ, 1975, 1, с. 689—692.

Поступила в редакцию
01.12.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 535.416.3

С. С. ЧЕСНОКОВ

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Спектральные методы являются эффективным средством решения линейных уравнений в частных производных. Разработанный сравнительно недавно алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [1] дает возможность с успехом применять эти методы для решения нелинейных уравнений. В задачах нелинейной оптики алгоритм БПФ впервые использован, по-видимому, в [2]. Там показано, что при исследовании теплового самовоздействия световых пучков данный алгоритм представляет определенные преимущества, связанные с экономией памяти и быстродействием. В настоящей работе обсуждается применимость БПФ к задачам дифракции и самовоздействия световых пучков со сложным начальным распределением интенсивности, имеющим ряд практических приложений.

1. Продемонстрируем вначале применение дискретного преобразования Фурье для исследования дифракции ограниченного светового пучка. Изменение комплексной амплитуды электрического поля волны $\mathscr{E}(x, y, z)$, распространяющейся вдоль оси z, описывается уравнением квазиоптики

$$2i\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial z}=\Delta_\perp\mathscr{E}, \tag{1}$$

здесь $\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; переменные x, y нормированы на начальный радиус пучка a_0, переменная z — на дифракционную длину $z_d=\frac{2\pi}{\lambda}a_0^2$ (λ — длина волны), амплитуда $\mathscr{E}$ отнесена к модулю амплитуды при $z=0$. На входе (при $z=0$) задано начальное условие

$$\mathscr{E}(x, y, 0)=\mathscr{E}_0(x, y). \tag{2}$$

Граничные условия имеют вид

$$\lim_{x,y\to\pm\infty}\mathscr{E}(x, y, z)=0. \tag{3}$$

Решение задачи (1)—(3) будем искать на области в виде квадрата со стороной L. Разложим $\mathscr{E}(x, y, z)$ в квадрате $-L/2\leqslant x\leqslant L/2$, $-L/2\leqslant y\leqslant L/2$ в конечный ряд Фурье

$$\mathscr{E}(x, y, z)=\sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2}\mathscr{E}_{kl}(z)\,e^{\frac{2\pi i}{L}(kx+ly)}. \tag{4}$$

При разложении в ряд (4) функция $\mathscr{E}$ дополняется до периодической с периодом L. Предполагается, что спектр функции $\mathscr{E}(x, y, z)$ ограничен или достаточно быстро убывает, так что сумма первых N^2 гармоник воспроизводит $\mathscr{E}$ с необходимой точностью.

При подстановке (4) в (1) получаем

$$\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \left(2i \frac{d\mathscr{E}_{kl}}{dz} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (k^2 + l^2) \mathscr{E}_{kl}\right) e^{\frac{2\pi i}{L}(kx+ly)} = 0.$$

Отсюда следует, что отдельные гармоники $\mathscr{E}_{kl}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d\mathscr{E}_{kl}}{dz} = \frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (k^2 + l^2) \mathscr{E}_{kl}, \quad \begin{matrix} -N/2+1 \leqslant k \leqslant N/2, \\ -N/2+1 \leqslant l \leqslant N/2. \end{matrix} \tag{5}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) имеет точное решение

$$\mathscr{E}_{kl}(z) = \mathscr{E}_{kl}(0)\, e^{\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (k^2+l^2) z}. \tag{6}$$

Введем пространственную сетку $x_m = m\Delta x$, $y_n = n\Delta y$, где $\Delta x = \Delta y = L/N$ $(-N/2+1 \leqslant m \leqslant N/2,\ -N/2+1 \leqslant n \leqslant N/2)$. Тогда начальные значения для гармоник $\mathscr{E}_{kl}(0)$ можно определить, используя значения комплексной амплитуды в узлах сетки при $z=0$. Эта процедура проводится численно посредством БПФ:

$$\mathscr{E}_{kl}(0) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \mathscr{E}_0(m\Delta x, n\Delta y)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(km+ln)}. \tag{7}$$

Пользуясь изложенным алгоритмом, по известному распределению амплитуды при $z=0$ с помощью прямого преобразования (7) определяют начальные значения фурье-гармоник. Затем по формулам (6) находят значения гармоник при заданном z_0 и делают обратное преобразование Фурье:

$$\mathscr{E}(m\Delta x, n\Delta y, z_0) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \mathscr{E}_{kl}(z_0)\, e^{\frac{2\pi i}{N}(km+ln)}. \tag{8}$$

Каждое из двухмерных преобразований (7), (8) производится посредством $2N$ одномерных преобразований.

Решение уравнения дифракции является точным для практических целей до тех пор, пока функция $\mathscr{E}$ исчезающе мала за пределами квадрата $|x| \leqslant L/2$, $|y| \leqslant L/2$, а ее спектр также исчезающе мал при $|k| \leqslant N/2$, $|l| \leqslant N/2$. При расчете распространения пучка полезно систематически оценивать функции $|\mathscr{E}(x, y, z)|^2$ и $|\mathscr{E}_{kl}|^2$ для контроля точности.

2. Стационарная задача о распространении светового пучка в движущейся нелинейной среде описывается уравнением

$$2i \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z} = \Delta_\perp \mathscr{E} + R\mathscr{E} \int_{-\infty}^{x} \mathscr{E}\mathscr{E}^* dx, \tag{9}$$

здесь $R = \left(\pi a_0^3 \alpha c \frac{\partial n}{\partial T} \Big/ \lambda^2 V \rho C_p\right) \mathscr{E}\mathscr{E}^*|_{z=0}$ — параметр нелинейности, пропорциональный интенсивности на входе в среду, c — скорость све-

та, α, ρ, C_p — коэффициент поглощения, плотность и теплоемкость среды соответственно, V — скорость движения среды (направлена вдоль оси x слева направо). Производная $\frac{\partial n}{\partial T}$ характеризует зависимость показателя преломления среды от температуры (здесь рассматривается случай дефокусирующих сред, когда $\frac{\partial n}{\partial T} < 0$).

Для решения нелинейного уравнения (9) используется следующий алгоритм. Пусть на j-м шаге по z амплитуда $\mathscr{E}_j = \mathscr{E}(x, y, j\Delta z)$ известна. При помощи прямого и обратного преобразования Фурье, а также формул типа (6) на следующем шаге решается уравнение линейной дифракции (1). Найденная амплитуда $\mathscr{E}^d_{j+\frac{1}{2}}$ используется для вычисления температуры среды

$$T_{j+\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{x} \mathscr{E}^d_{j+\frac{1}{2}} \mathscr{E}^{d*}_{j+\frac{1}{2}} dx.$$

Затем на этом же шаге по z решается уравнение распространения волны в наведенной тепловой линзе, т. е.

$$2i \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z} = RT_{j+\frac{1}{2}} \mathscr{E}$$

с начальным условием $\mathscr{E}_j = \mathscr{E}^d_{j+\frac{1}{2}}$. В результате мы получаем амплитуду волны на $(j+1)$-м шаге

$$\mathscr{E}_{j+1} = \mathscr{E}^d_{j+\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2} RT_{j+\frac{1}{2}} \Delta z}.$$

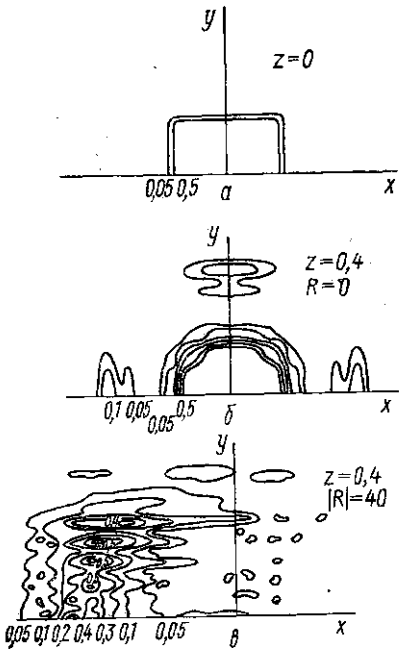
При реализации описанного алгоритма на ЦВМ необходимо зарезервировать объем оперативной памяти для размещения двух двумерных массивов размерности $N \times N$. Напомним, что для работы БПФ требуется, чтобы N представляло собой целую степень числа 2.

Рассмотренная расчетная схема является устойчивой при любом шаге Δz. Единственное ограничение, накладываемое на величину Δz, определяется тепловым набегом фазы, который вычисляется по амплитуде $\mathscr{E}^d_{j+\frac{1}{2}}$ волны, дифрагирующей на отрезке Δz. При большой нелинейности ($R \gg 10$) такой метод решения с пошаговой линеаризацией приводит к значительным ошибкам. Отсюда можно сформулировать условие для верхней оценки шага по z, а именно

$$\Delta z \ll \frac{\pi}{R \max\limits_{x,y} |T(x, y)|}. \tag{10}$$

3. При практическом расчете распространения пучков сложной конфигурации возникают проблемы, связанные с выбором соотношений между исходным размером пучка и размером области решения. Здесь играют роль два конкурирующих фактора. С одной стороны, для задания начального профиля интенсивности, имеющего большую крутизну, желательно, чтобы на поперечное сечение пучка приходилось как можно больше узлов сетки. С другой стороны, наличие дифракционного и теплового расплывания требует достаточного превышения размера области L над первоначальной шириной пучка $2a_0$.

Кроме того, ширина пучка в пространстве переменных x, y однозначно связана с шириной его спектра в пространстве волновых чисел k, l, что накладывает дополнительные ограничения на выбор начального распределения интенсивности. Указанные ограничения менее существенны в задачах дифракции, поскольку в этом случае модуль спектра в процессе распространения пучка не изменяется. При распространении в движущихся дефокусирующих средах пучок смещается в наветренную сторону, а модуль его спектра, в свою очередь, смещается в сторону бо́льших волновых чисел. Тепловая дефокусировка в движущейся среде приводит к обогащению спектра пучка высокочастотными гармониками и обеднению низкочастотными. Результаты проведенных контрольных расчетов позволяют сделать вывод об оптимальном выборе размера области L. Отношение начальной ширины пучка к размеру области в пространстве переменных x, y должно быть по возможности близко к отношению ширины его спектра к размеру области в пространстве волновых чисел k, l.



4. Рассмотрим в качестве примера имеющую прикладной интерес задачу о распространении сфокусированного пучка квадратного сечения. Расчеты проведены на ЦВМ БЭСМ-6 с использованием пространственной сетки 64×64. Соотношение между размером области решения и первоначальной шириной пучка $2a_0$ выбрано следующим: $L=6a_0$. Во избежание трудновоспроизводимых на сетке дифракционных эффектов начальное распределение амплитуды аподизировано в соответствии с выражением

$$\mathscr{E}_0(x, y) = e^{-(x^{20}+y^{20})/2}\, e^{i(x^2+y^2)/2F}, \tag{11}$$

здесь F — расстояние, на которое сфокусирован пучок. В рассматриваемом примере $F=0{,}5\,z_d$. Шаг интегрирования по z нелинейного уравнения (9) выбран равным $z_d/40$.

На рисунке, *а* нанесены линии равной интенсивности, соответствующие начальному распределению амплитуды (11). Значения уровней в долях максимального значения интенсивности указаны около соответствующих линий.

Картину линейной дифракции иллюстрирует рисунок, *б*, где изображено распределение интенсивности при $z=0{,}4$ (равном расстоянию до дифракционной перетяжки гауссова пучка единичного радиуса, сфокусированного на $F=0{,}5$). Отметим, что положение минимумов интенсивности хорошо согласуется с положением минимумов первого порядка для дифракции на квадратном отверстии.

Тепловое самовоздействие рассматриваемого пучка исследовано при значении нелинейного параметра $|R|=40$, что соответствует случаю умеренной нелинейности. Относящиеся к этому случаю линии равной интенсивности при $z=0{,}4$ изображены на рисунке, *в*. Смещение

энергетического центра пучка навстречу ветру составляет при этом $2{,}1\,a_0$.

Детальное исследование распространения пучка в ближней зоне ($z \ll 0{,}5\,z_d$) позволяет утверждать, что дифракционные явления на начальном участке трассы играют значительную роль в формировании температурного профиля среды и тем самым существенно определяют тепловые искажения пучка сложного профиля.

5. Метод быстрого преобразования Фурье в задачах нелинейной оптики обладает определенными преимуществами по сравнению с широко применяемыми в настоящее время разностными схемами и методом конечных элементов. В случае использования явных схем интегрирования по z вычислительные затраты на один шаг Δz для всех методов примерно одинаковы, однако спектральный метод допускает гораздо более крупные Δz. Когда используются неявные схемы и шаг Δz может быть сделан достаточно большим, вычислительные затраты на шаг для разностных схем возрастают и начинают значительно превышать затраты для алгоритма БПФ.

Вместе с тем в случае применения спектрального метода взаимодействие с границами сетки начинает искажать решение на меньших расстояниях z, чем при использовании разностных схем. По-видимому, алгоритм БПФ является наиболее эффективным, когда исследуется тепловое самовоздействие на сравнительно коротких трассах ($z \leqslant z_d$) и при умеренных значениях нелинейного параметра ($|R| \leqslant 40$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокрен У. Т. и др. Что такое «быстрое преобразование Фурье»? — Тр. Института инженеров по электронике и радиотехнике, 1967, **55**, № 10, с. 7—17.
2. Fleck J. A., Morris J. R., Feit M. D. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere.— Appl. Phys., 1976, **10**, N 1, p. 129—160; II — Appl. Phys., 1977, **14**, N 1, p. 99—115.

Поступила в редакцию
15.12.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 539.122.2

С. А. АХМАНОВ, Б. А. ГРИШАНИН, Г. А. ЛЯХОВ, Ю. В. ПОНОМАРЕВ

КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА РЕНТГЕНОВСКИХ ИСТОЧНИКОВ И ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ В РЕНТГЕНОВСКОЙ ОПТИКЕ. I. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Эффекты статистики рентгеновского излучения

1.1. Настоящая работа посвящена теоретическому анализу статистических свойств излучения рентгеновских источников (основное внимание уделено синхротронному излучению (СИ)), обсуждению методов их измерения и рассмотрению эффектов частичной когерентности в динамическом рассеянии (ДР) рентгеновского излучения в кристаллах. В отличие от оптики, где изучение статистики световых полей (законов распределения, временных и пространственных корреляционных функций (КФ) различных порядков) представляет собой хорошо раз-