реходах Cl VII при двухступенчатом нагреве плазмы ультракороткими лазерными импульсами.— Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с. 325—328.
11. Илюхин А. А., Перегудов Г. В., Рогозин Е. Н., Собельман И. И., Чирков В. А. К проблеме лазеров в далеком ультрафиолете $\lambda \sim 500$—700 А.— Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с. 569—574.
12. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. Формирование пространственной когерентности лазерного излучения при прохождении через порог генерации.— Письма в ЖЭТФ, 1976, 23, с. 391—395.
13. Абоян А. О., Безирганян П. А., Эйрамджян Ф. О. Цугомер рентгеновского диапазона.— Доклады Акад. наук Армянской ССР, 1974, 49, с. 245—249.
14. Инденбом В. Л. Интерференционная спектроскопия рентгеновского излучения.— Кристаллография, 1976, 21, с. 479—483.
15. Ахманов С. А., Гришанин Б. А., Ляхов Г. А., Пономарев Ю. В. Тезисы докл. на V Вавиловской конф. по нелин. оптике. Новосибирск, июнь 1977 г.
16. Benard C., Rousseau M. Statistical properties of synchrotron radiation.— J. Opt. Soc. Amer., 1974, 64. p. 1433—1444.
17. Ахманов С. А., Голяев Ю. Д., Тункин В. Г., Чиркин А. С. Пространственная когерентность оптических гармоник и распространение статистически неизотропных световых пучков.— Квантовая электроника, 1975, 2, с. 1171—1178.
18. Möllenstedt G., Düker H. Beobachtungen und Messungen an Biprisma — Interferenzen mit Electronenwellen.— Zs. f. Phys., 1956, 145, p. 377—397.
19. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974. 391 с.; Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., 1962. 352 с.
20. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М., 1970. 359 с.

Поступила в редакцию
24.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 539.122.2

С. А. АХМАНОВ, Б. А. ГРИШАНИН, Г. А. ЛЯХОВ, Ю. В. ПОНОМАРЕВ

КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА РЕНТГЕНОВСКИХ ИСТОЧНИКОВ И ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ В РЕНТГЕНОВСКОЙ ОПТИКЕ. II. ДИНАМИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ

§ 3. Учет частичной когерентности в теории динамического рассеяния

Из экспериментально наблюдаемых эффектов рентгеновской оптики наиболее чувствительны к статистике излучения эффекты динамического рассеяния (ДР) — экстинкционные («маятниковые») биения и эффект аномального прохождения, имеющие интерференционную природу. Их количественный анализ может служить поэтому способом исследования когерентности рентгеновских пучков. Существенно, что при этом эффективно использование традиционных для рентгеновской интерферометрии схем.

3.1. **Расчет энергии рассеяния (двухволновое приближение).** Обобщение теории ДР на случай частично когерентного излучения проводим на основе приближения Такаги [1]. Пусть на кристалл, оптические свойства которого описывает восприимчивость

$$\chi(\mathbf{r}) = \sum_h \chi_h \exp(-i\mathbf{k}_h\mathbf{r}) \tag{3.1}$$

(суммирование по векторам обратной решетки $\mathbf{k}_h$), падает волновой пакет со средним волновым вектором $\mathbf{k}_0$, приближенно удовлетворяющим условию брэгговского отражения $(\mathbf{k}_h + \mathbf{k}_0)^2 \simeq \mathbf{k}_0^2$. Если пространственные масштабы пакета (ширина пучка r_0, радиус кривизны фазового фронта R, поперечный радиус когерентности $r_\perp$) много больше длины волны $\lambda = 2\pi/\mathbf{k}_0$, а временные масштабы (длительность импульса τ_0, время когерентности $\tau_к$, время модуляции T) много больше обратной средней частоты $\omega_0^{-1} = (ck_0)^{-1}$, поле в кристалле можно описывать суперпозицией прошедшей и рассеянной волн. Укороченные уравнения для амплитуд $E_{0,h}$ этих волн выводятся из волнового уравнения методом медленных амплитуд [2]

$$\frac{2i}{k_0^2}\left(\boldsymbol{k}_0\nabla + \frac{\omega_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_0 = \chi_0 E_0 + \chi_h E_h, \tag{3.2}$$

$$\frac{2i}{k_0^2}\left[(k_0 + k_h)\nabla + \frac{\omega_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right]E_h = \chi_h E_0 + (\chi_0 + \delta)E_h.$$

Здесь $\delta = 1 - (k_0 + k_h)^2/k_0^2$ — брэгговская расстройка.

Экспериментально наблюдение ДР реализуется либо в схеме Лауэ, либо в схеме Брэгга; для конкретности рассмотрим симметричную геометрию (рис. 1): излучение падает на входную грань кристалла $z=0$; $k_h \perp z$ — схема Лауэ, $k_h \perp x$ — схема Брэгга. Эффекты дифракционного расплывания здесь не учитываются: $L < r_0 r_\perp/2\lambda$, L — толщина кристалла. В качестве граничных условий для (3.2) заданы пространственно-временные КФ:

$$\Gamma_{ij}(0, x, x', t, t') = \langle \mathbf{E}_i(0, x, t)\mathbf{E}_j^*(0, x', t')\rangle; \quad i, j = 0, h.$$

Решение (3.2) находится фурье-преобразованием по x и t. Полная — на уровне вторых моментов информация о статистике падающей волны содержится в КФ рассеянного пучка, прямое измерение которой в рентгеновском диапазоне затруднительно. В реальных рентгеновских экспериментах наиболее уверенно и просто измеряются энергетические (интегральные) характеристики пучков. Оказывается, что существенная информация о когерентных свойствах исследуемого пучка содержится в зависимости от L рассеянной энергии

$$W_h(L) = \iint dxdt\Gamma_{hh}(L, x, x, t, t). \tag{3.3}$$

Предположим для определенности, что КФ падающего излучения имеет гауссову форму:

$$\Gamma_{00}(0, x, x', t, t') = (W_0/\pi r_0\tau_0)\exp\left\{-\frac{(x+x')^2\cos^2\theta}{4r_0^2} - \right.$$

$$-\frac{(x-x')^2\cos^2\theta}{r_\perp^2} - \frac{[c(t+t') - (x+x')\sin\theta]^2}{4c^2\tau_0^2} -$$

$$-\frac{ik_0}{R}(x^2 - x'^2)\cos^2\theta - \frac{[c(t-t') - (x-x')\sin\theta]^2}{c^2\tau_к^2} -$$

$$\left. -\frac{i\omega_0}{c^2T}[(ct - x\sin\theta)^2 - (ct' - x'\sin\theta)^2]\right\}. \tag{3,4}$$

Тогда расчет с помощью обратного фурье-преобразования дает следующие выражения для W_h. В схеме Лауэ

$$\frac{W_h(L)}{W_0} = \frac{k_0^2 |\chi_h|^2 r_л}{8\pi^{1/2}} \exp(-k_0 L \operatorname{Im}\chi_0/\cos\theta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} da \times$$

$$\times \exp[-(ar_л/2)^2] \left| \operatorname{sinc}\left\{ \frac{L}{\cos\theta} \left[\left(a + \frac{k_0\delta}{4}\right)^2 + \left(\frac{k_0\chi_h}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right|^2 (L\cos\theta)^2 \tag{3.5}$$

с эффективным корреляционным радиусом $r_л$,

$$(r_л \sin\theta)^{-2} = \cos^2\theta\,[r_\perp^{-2} + (k_0 r_0/R)^2] + \sin^2\theta\,[\tau_к^{-2} + (\omega_0\tau_0/T)^2]\,c^{-2}.$$

В схеме Брэгга

$$\frac{W_h(L)}{W_0} = \frac{k_0^2 |\chi_h|^2 r_б}{8\pi^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} da \exp[-(ar_л/2)^2]\,|G(L, a)|^2, \tag{3.6}$$

$$G(L, a) = \left[\left(\frac{k_0\chi_h}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{k_0\chi_0}{2} - \frac{k_0\delta}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \times$$

$$\times \operatorname{cth}\left\{ \frac{L}{\cos\theta} \left[\left(\frac{k_0\chi_h}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{k_0\chi_0}{2} - \frac{k_0\delta}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} -$$

$$- i\left(a - \frac{k_0\chi_0}{2} - \frac{k_0\delta}{2}\right)$$

с эффективным корреляционным радиусом $r_б$,

$$(r_б \cos\theta)^{-2} = \sin^2\theta\,[r_\perp^{-2} + (k_0 r_0/R)^2] + \cos^2\theta\,[\tau_к^{-2} + (\omega_0\tau_0/T)^2]/c^2.$$

3.2. **«Маятниковые» биения при ДР частично когерентного излучения.** В тонком (слабопоглощающем: $L < (k_0 \operatorname{Im}\chi_{0,h})^{-1}$) кристалле основной эффект ДР — «маятниковый», периодический вдоль направ-

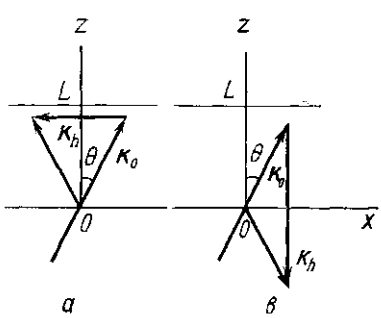

Рис. 1. Геометрия симметричного ДР: *а* — схема Лауэ, *б* — схема Брэгга

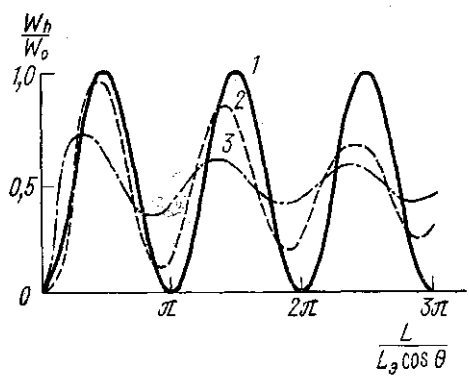

Рис. 2. Деформация маятниковой картины в зависимости от $r_Л$: *1* — $(L_э/r_Л)=0$; *2* — $(L_э/r_Л)^2=0{,}1$; *3* — $(L_э/r_Л)^2=1$

ления распространения обмен энергией между проходящей и рассеянной волнами [3]. Для когерентного излучения этот процесс описывает формула ($r_л \to \infty$; расстройку считаем малой, $k_0\delta L \ll 1$) $W_h(L)/W_0 = \sin^2(L/L_э\cos\theta)$, где $L_э = 2(k_0 \operatorname{Re}\chi_h)^{-1}$ — экстинкционная длина. «Вид-

ность» маятниковой картины в координатах «энергия — толщина» равна единице. Некогерентность излучения ухудшает эту видность (рис. 2). При $r_л \gg L_э$

$$\frac{2W_h(L)}{W_0} \simeq 1 - \left[1 + \left(\frac{4LL_э}{r_л^2 \cos\theta}\right)^2\right]^{-1/4} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2L}{L_э \cos\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{4LL_э}{r_л^2\cos\theta}\right)\right]. \qquad (3.7)$$

При больших L энергии проходящей и рассеянной волн уравниваются, взаимодействие между ними прекращается. Изменение контраста маятниковой картины из-за некогерентности излучения дает, таким образом, возможность определения корреляционных параметров пучка.

3.3. **Влияние неполной когерентности на эффект Бормана.** В толстых (сильнопоглощающих: $L \gg (k_0 \operatorname{Im}\chi_{0,h})^{-1}$) кристаллах интерференция проходящей и рассеянной волн ведет к эффекту аномального прохождения [3]. Учет неполной когерентности и в этом эффекте принципиален. При тех же предположениях о большой в сравнении с $L_э$ величине $r_л$ из (3.5) следует, что на выходе толстого кристалла присутствует лишь монотонно изменяющаяся с толщиной компонента рассеянной волны:

$$\frac{4W_h(L)}{W_0} \simeq \exp\left[-\frac{k_0 L}{\cos\theta}\operatorname{Im}(\chi_0 - \chi_h)\right]\left(1 + \frac{4L\operatorname{Im}\chi_h}{r_л^2 k_0 |\chi_h|^2 \cos\theta}\right)^{-1/2}. \qquad (3.8)$$

При конечном $r_л$ поглощение в кристалле происходит быстрее, причем по закону, отличному от экспоненциального.

3.4. **Вторичное укорочение уравнений — эффекты экстинкционной дифракции.** Более наглядная физическая интерпретация полученных результатов достигается процедурой вторичного укорочения уравнений (3.2) (применение для анализа ДР когерентных пучков см. в [4]). Указанием к этому служит вид приближенного решения (3.8): осциллирующая с L компонента энергии убывает по характерному для дифракции двумерного пучка на конечной апертуре $a = r_л \operatorname{Re}\chi_h/8$ закону.

Ограничимся здесь рассмотрением ДР монохроматического излучения ($\tau_{0,к} \to \infty$) с конечным $r_л$; соответствующее обобщение проводится без затруднений. Считаем также, что кристалл — оптически тонкий, а рассеяние происходит в схеме Лауэ.

Комбинируем уравнения для полей $E_{0,h}(z, x)$, а также для комплексно-сопряженных им полей в смещенной точке $E^*_{0,h}(z, x')$, домножая каждое на амплитуды в смещенных точках и попарно складывая. Проинтегрировав полученные уравнения по поперечной координате и усреднив, получаем четыре уравнения для корреляционных функций

$$D_{ij} = \int d(x + x')\langle E_i(z, x) E_j^*(z, x')\rangle \qquad (3.9)$$

(интересующая нас интегральная интенсивность рассеяния есть $D_{hh}(z, x, x)$); в безразмерных координатах $u = k_0\chi_h z/2\cos\theta$, $v = k_0\chi_h(x - x')/2\sin\theta$ эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial D_{00}}{\partial u} = -\frac{\partial D_{hh}}{\partial u} = i(D_{0h} - D_{h0}),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \pm \frac{\partial}{\partial v}\right) D_{\binom{0h}{h0}} = \pm i(D_{00} - D_{hh}). \qquad (3.10)$$

Система (3.10) имеет первый интеграл, обобщающий закон сохранения полной мощности:

$$D_{hh} + D_{00} = D_{00}(0, v). \tag{3.11}$$

Если излучение полностью когерентно $\left(\frac{\partial}{\partial v} = 0\right)$, решение (3.10) есть

$$D_{hh} = F_1 \cos 2u + F_2 \sin 2u, \tag{3.12}$$

$$D_{h0} - D_{0h} = 2i\,(F_1 \sin 2u - F_2 \cos 2u),$$

$F_{1,2}$ — константы, зависящие от граничных условий.

Для анализа ДР частично когерентного излучения поступаем аналогично тому, как это делается при переходе к параболическому приближению в задачах дифракции [5], именно отыскиваем решение (3.10) в виде (3.12), считая $F_{1,2}$ функциями, медленно изменяющимися на периоде тригонометрических функций в (3.12), т. е. на расстояниях порядка $L_э$. Вытекающее отсюда ограничение: $r_\perp > L_э$. Имея в виду, что КФ спадают при больших v (аналогия в задачах дифракции — переход в область тени по поперечной координате пучка [5]), приписываем производным $F_{1,2}$ по u и v разные порядки малости: $\left|\frac{\partial F_{1,2}}{\partial u}\right| \ll \left|\frac{\partial F_{1,2}}{\partial v}\right|$ (выполнение этого неравенства должно быть проверено *a posteriori*). Уравнения (3.10) после указанной подстановки и усреднения по периоду $U=\pi$ преобразуются в систему связанных уравнений диффузионного типа

$$4\,\frac{\partial F_{1,2}}{\partial u} = \mp \frac{\partial^2 F_{2,1}}{\partial v^2}. \tag{3.13}$$

КФ $|D_{hh}|$, вычисляемая таким способом, имеет две составляющие, одна из которых, не изменяющаяся по L, повторяет форму КФ падающего пучка; ширина второй, квазипериодической составляющей увеличивается с ростом L. Радиус пространственной когерентности рассеянного, равно как и проходящего, пучка увеличивается с толщиной кристалла по закону

$$r_\perp(L) \simeq (LL_э)^{1/2}\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{3.14}$$

Этот эффект имеет близкую аналогию в теореме ВЦЦ, описывающей дифракционное увеличение $r_\perp$ излучения в свободном пространстве.

§ 4. Экспериментальные возможности наблюдения и использования эффектов ДР частично когерентных пучков

Наблюдение и исследование маятниковой картины в координатах «полная энергия (интенсивность) рассеяния — толщина» осуществимо в схеме секционной топографии [6], в которой используются клиновидный кристалл и детектор. Изменение толщины обеспечивается перемещением кристалла поперек падающего пучка.

Видность интерференционной картины в таком эксперименте зависит как от статистических, так и от динамических параметров падающего излучения: пространственной и временной когерентности, апертуры и фазовой модуляции волнового пакета (относительный вклад их определяет формула для $r_д$). Разумеется, привлекательная возможность измерения в одном эксперименте корреляционных параметров пучка имеет ограничения. Для уверенного измерения, например, $r_\perp$ необхо-

димо обеспечить достаточно малую расходимость ($r_\perp < \lambda R/r_0$) и достаточно большую длину когерентности ($r_\perp < |\mathrm{ctg}\,\theta| r_\parallel$); с другой стороны, такие характеристики, как r_0, R и $r_\parallel = c\tau_к$, могут быть измерены независимо, поэтому для оценки $r_\perp$ требуется только достаточная точность обработки результатов обсуждаемого эксперимента. Дополнительные возможности, связанные с различной угловой зависимостью вклада $r_\perp$ и $r_\parallel$ в $r_л$ (рис. 3), дает использование кристаллов с различными, но близкими параметрами решетки. Оценки по формулам § 3 показывают, что при использовании известных совершенных кристаллов контролируемые с помощью ДР значения $r_\perp$ лежат в диапазоне 0,1—10 мкм.

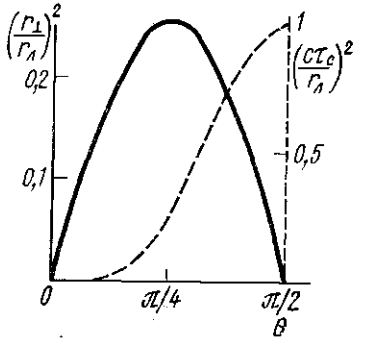

Рис. 3. Зависимость нормированного обратного квадрата радиуса $r_л^{-2}$ от $\theta(RT\to\infty)$; сплошная кривая — $c\tau_к \gg r_\perp$ пунктирная — $c\tau_к \ll r_\perp$

Результаты п. 3.4 дают основание поставить вопрос об использовании эффектов ДР для формирования рентгеновских пучков с заданными корреляционными параметрами. Механизм ВЦЦ приобретения пространственной когерентности в свободном пространстве в рентгеновском диапазоне слаб вследствие малости длины волны. В то же время экстинкционный механизм (см. п. 3.4) позволяет сформировать пучки с $r_\perp \simeq 100$ мкм при использовании кристаллов миллиметровой толщины с типичными значениями $L_э \simeq 1$—10 мкм (см. (3.14)).

§ 5. Заключение

Проведенный анализ позволяет сформулировать определенную программу экспериментов по статистической рентгеновской оптике, в частности, для СИ. Прежде всего представляет интерес измерение поперечных пространственных КФ первого, а возможно и второго, порядка в видимом и ближнем УФ-диапазонах. Здесь можно использовать традиционную оптическую технику (например, описанную в [7]); экспериментальные данные непосредственно сопоставимы с результатами расчета § 2. В условиях, когда измеряются одновременно КФ первого и второго порядков, такой эксперимент дает информацию и о статистике СИ (ср. с [8]).

Особо важными представляются измерения КФП в диапазоне вблизи $\lambda \leqslant 4$ Å; речь здесь может идти о регистрации квантовых эффектов. Для этой цели могут быть использованы рентгеновские интерферометры либо методика, описанная в § 3 и 4.

Широкий класс экспериментов по статистической рентгеновской и γ-оптике связан с изучением ДР частично когерентного излучения; весьма эффективными здесь оказываются представления и методы, развитые в статистической нелинейной оптике [9]. В частности, рассмотренные в § 3 эффекты сглаживания экстинкционных биений, увеличение $r_\perp$ при распространении имеют много общего со статистическими эффектами при генерации оптических гармоник, комбинационных волн [9], хотя, разумеется, физические причины возбуждения связанных волн в двух этих случаях существенно различны.

Использование процедуры «вторичного укорочения» уравнений ДР (п. 3.4) существенно расширяет круг статистических задач рентгенов-

ской оптики. Подчеркнем, в частности, что в наших расчетах учитывается наряду со случайной и регулярная модуляция (конечная ширина пучка и длительность импульса, регулярная кривизна волнового фронта). Такая постановка задачи характерна для современной нелинейной оптики; и в этом пункте перенесение соответствующих представлений в рентгеновскую оптику весьма плодотворно (см. также [4]).

Наконец, исследованное в § 3 влияние неполной когерентности волн на эффекты ДР электромагнитного поля сохраняет свои особенности и в дифракции электронов. Основанные на этих эффектах методы измерения и формирования КФ могут быть поэтому использованы для изучения временной и пространственной когерентности низкоэнергетических электронов — эффектов, все более привлекающих внимание исследователей в области электронной оптики [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takagi S. Dynamical theory of diffraction applicable to crystals with any kind of small distortion.— Acta Crystal., 1962, **15**, p. 1311—1312.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964. 295 с.
3. Пинскер З. Г. Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальном кристалле. М., 1974. 368 с.
4. Андреев А. В., Ильинский В. А. О возможности использования эффекта аномального прохождения γ-квантов для усиления ограниченных пучков в γ-лазере.— Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, с. 462—464.
5. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде.— Успехи физ. наук, 1967, **93**, с. 19—70.
6. Иверонова В. И., Ревкевич Г. П. Теория рассеяния рентгеновских лучей. М., 1978. 277 с.
7. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. Формирование пространственной когерентности лазерного излучения при прохождении через порог генерации.— Письма в ЖЭТФ, 1976, **23**, с. 391—395.
8. Гук И. С., Наугольный Н. Н., Тарасенко А. С. Исследование статистики фотонов синхротронного излучения электронов в накопителе.— ЖЭТФ, 1976, **70**, с. 511—520.
9. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М., 1971, 128 с.
10. Hawkes P. W. Photometry and partial coherence in electron optics.— General Relations Optic, 1977, **47**, p. 453—467.

Поступила в редакцию
24.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 538.574.6

В. А. БУРОВ, А. А. ГОРЮНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СКАЛЯРНОЙ ДИФРАКЦИИ

1. Сама постановка обратных краевых задач вызывает затруднения; вопрос единственности решения обратной задачи дифракции для краевой задачи — фундаментальный вопрос, — по-видимому, до сих пор не решен до конца [1, 2]. В силу этого предлагаемый здесь метод следует рассматривать как один из возможных подходов к обратным краевым задачам. Существование и единственность решения обеспечиваются введением определенной априорной информации — метод, предложенный впервые, по-видимому, Новиковым [3] и нашедший впоследствии применение в ряде работ по обратным задачам [4], [5].