

ской оптики. Подчеркнем, в частности, что в наших расчетах учитывается наряду со случайной и регулярная модуляция (конечная ширина пучка и длительность импульса, регулярная кривизна волнового фронта). Такая постановка задачи характерна для современной нелинейной оптики; и в этом пункте перенесение соответствующих представлений в рентгеновскую оптику весьма плодотворно (см. также [4]).

Наконец, исследованное в § 3 влияние неполной когерентности волн на эффекты ДР электромагнитного поля сохраняет свои особенности и в дифракции электронов. Основанные на этих эффектах методы измерения и формирования КФ могут быть поэтому использованы для изучения временной и пространственной когерентности низкоэнергетических электронов — эффектов, все более привлекающих внимание исследователей в области электронной оптики [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takagi S. Dynamical theory of diffraction applicable to crystals with any kind of small distortion.— *Acta Crystal.*, 1962, 15, p. 1311—1312.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964. 295 с.
3. Пинскер З. Г. Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальном кристалле. М., 1974. 368 с.
4. Андреев А. В., Ильинский В. А. О возможности использования эффекта аномального прохождения γ -квантов для усиления ограниченных пучков в γ -лазере.— *Письма в ЖЭТФ*, 1975, 22, с. 462—464.
5. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде.— *Успехи физ. наук*, 1967, 93, с. 19—70.
6. Иверонова В. И., Ревкевич Г. П. Теория рассеяния рентгеновских лучей. М., 1978. 277 с.
7. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. Формирование пространственной когерентности лазерного излучения при прохождении через порог генерации.— *Письма в ЖЭТФ*, 1976, 23, с. 391—395.
8. Гук И. С., Наугольный Н. Н., Тарасенко А. С. Исследование статистики фотонов синхротронного излучения электронов в накопителе.— *ЖЭТФ*, 1976, 70, с. 511—520.
9. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М., 1971, 128 с.
10. Hawkes P. W. Photometry and partial coherence in electron optics.— *General Relations Optic*, 1977, 47, p. 453—467.

Поступила в редакцию
24.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 538.574.6

В. А. БУРОВ, А. А. ГОРЮНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СКАЛЯРНОЙ ДИФРАКЦИИ

1. Сама постановка обратных краевых задач вызывает затруднения; вопрос единственности решения обратной задачи дифракции для краевой задачи — фундаментальный вопрос, — по-видимому, до сих пор не решен до конца [1, 2]. В силу этого предлагаемый здесь метод следует рассматривать как один из возможных подходов к обратным краевым задачам. Существование и единственность решения обеспечиваются введением определенной априорной информации — метод, предложенный впервые, по-видимому, Новиковым [3] и нашедший впоследствии применение в ряде работ по обратным задачам [4], [5].

Доказательство существования и единственности решения обратной краевой задачи при наличии данной априорной информации о рассеивателе представляет собой самостоятельный вопрос, рассматриваемый в каждом конкретном случае особо. Известно, однако, что для рассеивателя звездной формы обратная краевая задача дифракции имеет решение, и это решение единственно [2].

2. Пусть Γ — открытая односвязанная область трехмерного пространства, занимаемая рассеивателем и описываемая характеристической функцией $\gamma(\mathbf{r})$:

$$\gamma(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{r} \in \Gamma, \\ 0 & \text{при } \mathbf{r} \notin \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

и пусть Σ — поверхность звездного типа, замыкающая Γ .

Как известно, поле в области наблюдения Y имеет вид

$$U(\mathbf{y}) = U_0(\mathbf{y}) + u(\mathbf{y}),$$

где $U_0(\mathbf{y})$ — первичное (падающее) поле, а $u(\mathbf{y})$ — рассеянное поле, являющееся в области Y решением уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

удовлетворяющим граничному условию и условию излучения.

Рассмотрим для определенности задачу Дирихле. Рассеянное поле u в области Y имеет вид

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} g(\mathbf{r} - \mathbf{y}) d\Sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial U_0(\mathbf{r})}{\partial n} g(\mathbf{r} - \mathbf{y}) d\Sigma. \quad (2)$$

Пусть R — некоторая ограниченная зона поиска, отделимая от Y и заведомо содержащая область Γ вместе с замыканием Σ внутри себя. Как известно [6, 7], рассеянное поле u вне Γ представимо в виде

$$u(\mathbf{y}) = \int_R g(\mathbf{r} - \mathbf{y}) T(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

где $T(\mathbf{r})$ — мнимые источники рассеянного поля, аппроксимируемые распределением монополей, с носителем строго внутри Γ .

Таким образом, поле u мнимых источников $T(\mathbf{r})$ на Σ имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = \int_R g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') T(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Sigma.$$

Функцию распределения мнимых источников $T(\mathbf{r}')$ можно определить по рассеянному полю $u(\mathbf{y})$, замеряемому на области Y , используя их разложение по системе $\{\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})\}$, $\{\varphi_i(\mathbf{y})\}$ — системе союзных фундаментальных элементов Шмидта оператора распространения поля из области R в область Y ([8, 9]):

$$T(\mathbf{r}') = \sum \tilde{\varphi}_i(\mathbf{r}') \lambda_i^{-1} \int_Y u(\mathbf{y}) \tilde{\varphi}_i^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3)$$

Используя функцию $T(\mathbf{r}')$ — функцию распределения мнимых источников, — уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} g(\mathbf{r} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \int_R g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') T(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} d\Sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial U_0(\mathbf{r})}{\partial n} g(\mathbf{r} - \mathbf{y}) d\Sigma. \quad (4)$$

Выражение (4) рассматривается как уравнение, на основании которого следует определить вид Σ — рассеивающей поверхности, выразив в нем предварительно $T(\mathbf{r}')$ через рассеянное поле $u(\mathbf{y})$ при помощи (3). Однако непосредственное определение Σ — поверхности интегрирования — из уравнения (4) представляет собой сложную задачу; переходя от поверхностных интегралов к объемным, задачу можно упростить, сведя ее к определению характеристической функции рассеивателя $\gamma(\mathbf{r})$, определяющей (1) форму рассеивающей поверхности.

Для перехода к объемным интегралам в выражении (4) достаточно показать, что подынтегральные выражения непрерывны вместе со своими частными производными внутри Σ .

Функция $g(\mathbf{r}-\mathbf{y})\nabla_r U_0(\mathbf{r})$ очевидно удовлетворяет на R этому условию.

Функцию

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r \int_R g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') T(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

можно представить, аппроксимируя $T(\mathbf{r}')$ конечным рядом в выражении (3), и поскольку такое приближение ограничено по абсолютной величине вместе со своими частными производными, то на основании свойств объемного потенциала нетрудно показать, что аппроксимация $F(\mathbf{r}, \mathbf{y})$ допускает применение теоремы Остроградского — Гаусса.

Переходя к объемным интегралам в выражении (4), получаем

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \iint_R \gamma(\mathbf{r}) [\nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] T(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_R \gamma(\mathbf{r}) [\nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r U_0(\mathbf{r}) - k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) U_0(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражение для $T(\mathbf{r}')$ через наблюдаемое поле согласно (3) и разлагая затем $\gamma(\mathbf{r})$, $u(\mathbf{y})$, $U_0(\mathbf{r})$ по некоторой (предпочтительной для конкретной задачи) системе базисных функций $\{\psi_i\}$, приходим к следующему выражению:

$$u_j = -\Sigma A_{ijm} \gamma_i u_m - \Sigma \tilde{A}_{ijk} \gamma_i U_k^0, \quad (6)$$

в котором $\tilde{A}_{ijk}$ и γ_i , например имеют вид

$$\tilde{A}_{ijk} = -\frac{1}{4\pi} \int_R \int_Y \psi_j^*(\mathbf{y}) \psi_i(\mathbf{r}) [\nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r \psi_k(\mathbf{r}) - k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{r})] d\mathbf{r} d\mathbf{y},$$

$$\gamma_i = \int_R \gamma(\mathbf{r}) \psi_i^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

В выражении (6) компоненты кубических матриц A_{ijm} , $\tilde{A}_{ijk}$ и компоненты вектора U_k известны априори, компоненты вектора u_m определяются в результате измерения рассеянного поля на области Y ; компоненты вектора γ_i являются неизвестными, подлежащими оценке.

Все величины в (6) имеют конечный порядок: $i, j, k, m=1, 2, \dots, N$. Такая аппроксимация (как и аппроксимация $T(\mathbf{r})$ конечным рядом) оправдана тем, что точность определения мнимых источников по рассеянному полю $u(\mathbf{y})$, а следовательно и точность восстановления $\gamma(\mathbf{r})$, всегда ограничена присутствием помех, вводимых в рассмотрение ниже.

Уравнение (6) нелинейно по наблюдаемому полю.

3. Пусть $V(y)$ — поле, реально измеряемое на области Y , отличающееся от истинного рассеянного поля $u(y)$ аддитивной случайной добавкой $n(y)$. Пусть также мы имеем некоторую априорную информацию о рассеивателе, представляемую в виде характеристической функции $\gamma_0(r)$, от которой характеристическая функция истинного рассеивателя отличается на некоторую случайную величину $\chi(r)$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{aligned} u &= V - n, \\ \gamma &= \gamma_0 + \chi. \end{aligned} \quad (7)$$

Случайные величины n и χ считаются гауссовыми с известными корреляционными матрицами коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} N_{jm} &= \langle n_j n_m^* \rangle = \iint \langle n(y) n^*(y') \rangle \psi_j^*(y) \psi_m(y') dy dy', \\ X_{ik} &= \langle \chi_i \chi_k^* \rangle = \iint \langle \chi(r) \chi^*(r') \rangle \psi_i^*(r) \psi_k(r') dr dr'. \end{aligned}$$

Подставляя (7) в (6), приходим к уравнению

$$V_j - n_j = -\Sigma A_{ijm} (\gamma_i^0 + \chi_i) (V_m - n_m) - \Sigma \tilde{A}_{ijk} (\gamma_i^0 + \chi_i) U_k^0$$

и, пренебрегая в нем членами $\chi_i n_m$ как величинами более высокого порядка малости по сравнению с членами $\gamma_i^0 n_m$, n_j , получаем окончательно в векторном виде

$$n = m + \theta \chi. \quad (8)$$

Здесь вектор m имеет следующий вид:

$$m = \|m_m\| = \|(\delta_{jm} + \Sigma A_{ijm} \gamma_i^0)^{-1} (\Sigma A_{ijm} \gamma_i^0 V_m + \Sigma \tilde{A}_{ijk} \gamma_i^0 U_k^0)\|,$$

а матрица

$$\theta = (\delta_{ij} + \Sigma A_{ijm} \gamma_i^0)^{-1} (\Sigma A_{ijm} V_m + \Sigma \tilde{A}_{ijk} U_k^0).$$

4. Логарифм функции правдоподобия в силу взаимонезависимости помех запишем, опуская не участвующие в варьировании члены:

$$-\ln L = -\ln [P(n|\chi) P(\chi)] = [m + \theta \chi]^+ N^{-1} [m + \theta \chi] + \chi^+ X^{-1} \chi \rightarrow \min_{\chi},$$

варьируя который, получаем алгоритм нелинейной фильтрации выборки V :

$$\hat{\chi} = -(\theta^+ N^{-1} \theta + X^{-1})^{-1} \theta^+ N^{-1} m. \quad (9)$$

Шпур матрицы X_{ij} приближенно (с точностью аппроксимации) равен усредненному модулю возможного отклонения объема истинного рассеивателя от априорно известного:

$$\text{Sp } [X] = \Sigma \langle \chi_i \chi_i^* \rangle = \int_R \langle \chi(r) \chi^*(r) \rangle dr = \int_R \langle [y(r) - \gamma_0(r)]^2 \rangle dr = \langle V_{|y-\gamma_0|} \rangle.$$

Несмотря на то что звездная форма препятствия гарантирует единственность и сходимость оценки мнимых источников при исчезающих помехах [2], адекватность восстановленной предлагаемым образом формы истинного рассеивателя определяется помеховой ситуацией. При сильных помехах процесс регуляризации приводит к пренебрежению коэффициентами разложения с высшими номерами, что искажает вид оценки мнимого источника и формы тела.

5. Линеаризация уравнения (5) по рассеянному полю дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &\approx \frac{1}{4\pi} \int_R \gamma(\mathbf{r}) [\nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r U_0(\mathbf{r}) - k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) U_0(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_R \int_X \gamma(\mathbf{r}) \nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_R \int_X \gamma(\mathbf{r}) k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) h(\mathbf{r}-\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10)$$

в котором $f_0(\mathbf{x})$ — источники первичного (облучающего) поля, сконцентрированные в области излучения X . Введем систему координат, начало которой расположено в области R . Тогда при переходе в дальнюю зону (приближение Фурье) имеем

$$\nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) \nabla_r g(\mathbf{r}-\mathbf{x}) \approx -k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) g(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \quad (11)$$

так как

$$|\mathbf{r}-\mathbf{y}|^{-1} \ll k, \quad |\mathbf{r}-\mathbf{x}|^{-1} \ll k \quad (|\mathbf{r}-\mathbf{y}|, |\mathbf{r}-\mathbf{x}| \gg \lambda),$$

и если размеры областей X, Y, R много меньше расстояния между ними, а области X и Y совпадают, то

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{y}}{|\mathbf{r}-\mathbf{y}|} \approx -\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}; \quad \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \approx -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}; \quad \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \approx 1.$$

Вместе с тем в дальней зоне множитель амплитудного расхождения меняется слабо, и, заменяя его константой D , вынесем его из-под интеграла. Раскладывая показатель экспоненты, имеем

$$g(\mathbf{r}-\mathbf{y}) g(\mathbf{r}-\mathbf{x}) \approx \frac{1}{D^2} \exp\{2iDk\} \exp\{i\mathbf{p}\mathbf{r}\},$$

$$\mathbf{p} = k \left[\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right].$$

и наконец, предполагая, что источник первичного поля точечный:

$$f_0(\mathbf{x}) = f_0 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0); \quad \mathbf{x}_0 \in Y,$$

получаем окончательно:

$$u(\mathbf{y}) \approx -\frac{1}{\pi D^2} e^{2ikD} f_0 p^2 \int_R \gamma(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (12)$$

— выражение, лежащее в основе работ [10—12], в которых рассматриваются алгоритмы определения характеристической функции рассеивателя $\gamma(\mathbf{r})$ на основании замеров рассеянного поля в дальней зоне без учета помех. Как видно из (12), характеристическая функция рассеивателя и спектр рассеянного поля в дальней зоне связаны преобразованием Фурье; в этом приближении обратная задача состоит в определении трехмерного оригинала по спектру рассеянного поля, замеренному на ограниченном объеме в $\mathbf{p}$ -пространстве (размеры апертуры Y определяют диапазон ориентаций векторов $\mathbf{p}$, частотный диапазон определяет диапазон изменения модуля вектора $\mathbf{p}$).

6. Следует отметить, что при получении (12), кроме приближений дальней зоны, была допущена линеаризация (5). Физический смысл

линеаризации состоит в следующем. Уравнение (10) можно получить непосредственно из (3), положив

$$\left. \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{\partial U_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\Sigma}$$

наряду с (внутренне противоречащим ему) вторым условием

$$u(\mathbf{r})|_{\Sigma} = -U_0(\mathbf{r})|_{\Sigma}.$$

Таким образом, выражение (12), выведенное впервые, по-видимому, Боярским (ссылки на его неопубликованные работы имеются в [10, 11]), является лишь «приближенно» обратной задачей Дирихле, решенной при этом в приближении дальней зоны. В методе, излагаемом здесь, значение нормальной производной рассеянного поля u и Σ согласуется с рассеянным же полем, замеряемым на Y . Это согласование производится с помощью мнимого источника.

Аналогично можно рассматривать задачу Неймана и третью краевую задачу в обратной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. М. Обратные задачи для дифференциальных уравнений.— В кн.: Сборник трудов Всесоюзного симпозиума по обратным задачам. Новосибирск, 1972.
2. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., 1971. 308с.
3. Новиков П. С. Об единственности решения обратной задачи потенциала.— ДАН СССР, 1938, с. 165—168.
4. Гласко В. Б., Кравцова Г. А., Кравцов В. В. Об одной обратной задаче гравиметрии.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1970, 11, № 2, с. 174—179.
5. Гласко В. Б. Некоторые математические вопросы интерпретации геофизических наблюдений. Докт. дис. М., 1972.
6. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., 1950.
7. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., 1963.
8. Буров В. А., Горюнов А. А. Собственные функции операторов распространения.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, 17, № 6, с. 728—734.
9. Буров В. А., Горюнов А. А. Статистические оценки в обратной задаче рассеяния скалярных волн.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1977, 18, № 6, с. 95—99.
10. Левис П. М. Обратная задача дифракции.— Зарубежная электроника, 1970, № 2, с. 100—112.
11. Ормсби Д. Ф. А., Томлянович Н. М., Островский Г. С., Вейсс М. Р. Изображение целей когерентным радиолокатором.— Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 4, с. 20—37.
12. Norman Bleistein. Physical optics farfield inverse scattering in the time domain.— JASA, 60, N 6, Dec. 1976, p. 1249—1255.

Поступила в редакцию
24.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 621.396.67

В. А. БУРОВ, О. В. ДМИТРИЕВ

О РАЗРЕШЕНИИ СИГНАЛОВ АНТЕННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Проблемам разрешения сигналов в настоящее время уделяется большое внимание в радиолокации, радиоастрономии, оптике и гидроакустике [1—4]. При этом рассматриваются задачи разрешения двух