линеаризации состоит в следующем. Уравнение (10) можно получить непосредственно из (3), положив

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_{\Sigma}=\frac{\partial U_0(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_{\Sigma}$$

наряду с (внутренне противоречащим ему) вторым условием

$$u(\mathbf{r})|_{\Sigma}=-U_0(\mathbf{r})|_{\Sigma}.$$

Таким образом, выражение (12), выведенное впервые, по-видимому, Боярским (ссылки на его неопубликованные работы имеются в [10, 11]), является лишь «приближенно» обратной задачей Дирихле, решенной при этом в приближении дальней зоны. В методе, излагаемом здесь, значение нормальной производной рассеянного поля u и Σ согласуется с рассеянным же полем, замеряемым на Y. Это согласование производится с помощью мнимого источника.

Аналогично можно рассматривать задачу Неймана и третью краевую задачу в обратной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. М. Обратные задачи для дифференциальных уравнений.— В кн.: Сборник трудов Всесоюзного симпозиума по обратным задачам. Новосибирск, 1972.
2. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., 1971. 308с.
3. Новиков П. С. Об единственности решения обратной задачи потенциала.— ДАН СССР, 1938, с. 165—168.
4. Гласко В. Б., Кравцова Г. А., Кравцов В. В. Об одной обратной задаче гравиметрии.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1970, **11**, № 2, с. 174—179.
5. Гласко В. Б. Некоторые математические вопросы интерпретации геофизических наблюдений. Докт. дис. М., 1972.
6. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., 1950.
7. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., 1963.
8. Буров В. А., Горюнов А. А. Собственные функции операторов распространения.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, **17**, № 6, с. 728—734.
9. Буров В. А., Горюнов А. А. Статистические оценки в обратной задаче рассеяния скалярных волн.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1977, **18**, № 6, с. 95—99.
10. Левис П. М. Обратная задача дифракции.— Зарубежная электроника, 1970, № 2, с. 100—112.
11. Ормсби Д. Ф. А., Томлянович Н. М., Островский Г. С., Вейсс М. Р. Изображение целей когерентным радиолокатором.— Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 4, с. 20—37.
12. Norman Bleistein. Physical optics farfield inverse scattering in the time domain.— JASA, **60**, N 6, Dec. 1976, p. 1249—1255.

Поступила в редакцию
24.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1980, Т. 21, № 6

УДК 621.396.67

В. А. БУРОВ, О. В. ДМИТРИЕВ

О РАЗРЕШЕНИИ СИГНАЛОВ АНТЕННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Проблемам разрешения сигналов в настоящее время уделяется большое внимание в радиолокации, радиоастрономии, оптике и гидроакустике [1—4]. При этом рассматриваются задачи разрешения двух близких сигналов, а также разрешения многих сигналов. В приложении к дискретным антенным решеткам, в частности, возникают проблемы определения: а) минимального углового расстояния между источниками сигналов, при котором они разрешимы, б) максимального числа сигналов, разрешимых с помощью антенной решетки, и в) характера оптимальной обработки сигналов для их разрешения.

Поставленные задачи можно решить, применяя статистический подход, при котором разрешение сигналов сводится к проверке статистических гипотез [2].

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать прием сигналов с помощью линейной эквидистантной антенной решетки, состоящей из M элементов. Будем также предполагать, что источники сигналов независимы, а сами сигналы представляют собой гауссовские узкополосные случайные процессы с одной и той же полосой Δf, так что нормированная пространственно-корреляционная матрица k-го ($k=1$, $2, \ldots$) сигнала может быть записана в виде

$$S_k = \| \mu_{lm} e^{i(l-m)\varphi_k} \|, \qquad (1)$$

где μ_{lm} — коэффициенты пространственной корреляции, которые предполагаются одинаковыми для всех сигналов, а

$$\varphi_k = \frac{2\pi f}{c} d \sin \theta_k. \qquad (2)$$

В формуле (2) f — центральная частота узкополосного процесса, θ_k — пеленг на фазовый центр k-го источника, а d — расстояние между точками приема.

Будем считать, что прием производится на фоне аддитивной гауссовской помехи с нормированной пространственно-корреляционной матрицей $N = \|\nu_{lm}\|$, и решение, подобно [5], принимается на основе набора T независимых векторов v_i ($i=1, 2, \ldots, T$), каждый из которых представляет совокупность отсчетов с антенной решетки.

Рассмотрим вначале задачу разрешения двух сигналов. При этом для гипотез H_1 и H_2, предполагающих наличие одного или двух сигналов, корреляционные матрицы каждого из векторов v_i ($i=1, 2, \ldots, T$) будут

$$K_1 = s_1 S_1 + nN; \; K_2 = s_1 S_1 + s_2 S_2 + nN. \qquad (3)$$

В (3) s_1, s_2, n — мощности сигналов и помех, которые в общем случае неизвестны.

Оценка минимального углового расстояния между источниками сигналов, при котором они разрешимы, была получена в [6]. При этом предполагалось, что мощности сигналов известны и совпадают, а параметры φ_1 и φ_2, определяющие пеленги источников сигналов, можно записать в виде

$$\varphi_1 = \varphi + \Delta; \; \varphi_2 = \varphi - \Delta, \qquad (4)$$

где в представляющем интерес случае угловое расстояние 2Δ между источниками сигналов значительно меньше ширины диаграммы направленности антенной решетки:

$$\Delta \ll c/2Mfd; \; c/2fd \sim 1. \qquad (5)$$

В качестве альтернативной гипотезы H_1 можно рассмотреть случай, когда имеется один сигнал с пеленгом, характеризуемым параметром φ. Для принятия решения о присутствии двух источников при условии, что все параметры сигналов и помехи известны, воспользуемся байесовским правилом, т. е. рассмотрим отношение правдоподобия

$$w_2(v)/w_1(v) > \gamma, \tag{6}$$

где для простоты положим $\gamma = 1$. Функции распределения $w_1(v)$ и $w_2(v)$ в гауссовском приближении могут быть записаны в виде [5]

$$w_j(v) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[K_j^{-1} W]\right\} \Big/ (2\pi)^{MT/2} |K_j|^{1/2}. \tag{7}$$

$$j = 1, 2.$$

В (7) W — случайная матрица:

$$W = \sum_{i=1}^{T} v_i v_i'.$$

В предположении, что истинной является гипотеза H_2, в [6] было получено выражение для разрешимых угловых расстояний, т. е. таких значений параметра Δ, при которых вероятность выполнения неравенства (6) достаточно высока:

$$\Delta > 2\alpha \Big/ \left[2\left(S + \frac{n}{s} N\right)^{-1} S''_{\varphi\varphi}\right]^{1/4}. \tag{8}$$

В (8) S — матрица вида (1), в которой параметр φ определяется выражением (4), а $S''_{\varphi\varphi}$ — вторая производная S по параметру φ.

Непосредственные вычисления при условии $M \frac{s}{n} \gg 1$ позволяют из (8) получить оценку «потенциальной разрешающей способности» антенной решетки при разрешении точечных источников сигналов на фоне пространственно-некоррелированной помехи [6]:

$$\Delta_{\text{пот}} > 1/M \left(M \frac{s}{n}\right)^{1/2} T^{1/4}. \tag{9}$$

Из (9) видно, что рэлеевский предел разрешающей способности $\Delta_P \sim 1/M$ превосходит $\Delta_{\text{пот}}$ в $\sim \left(M \frac{s}{n}\right)^{1/2} T^{1/4}$ раз. Величина $M^2 (s/n)^2 T$ фактически определяет выходное отношение сигнал/помеха (по мощности), получаемое за счет пространственной и временной обработок. Таким образом, при оптимальной обработке разрешающая способность может превосходить рэлеевский предел за счет увеличения выходного отношения сигнал/помеха в $(s/n)^{1/4}_{\text{вых}}$ раз. Заметим, что аналогичные результаты для разрешающей способности антенных решеток были получены другим способом в [7]. Характер же оптимальной обработки для получения разрешающей способности, близкой к потенциальной, будет выяснен ниже.

Перейдем к задаче об определении числа сигналов, разрешимых антенной решеткой. Для этого рассмотрим набор гипотез H_j ($j = 1, 2, \ldots$), каждая из которых предполагает, что антенной решеткой принимаются сигналы от j независимых источников. Если существует такой номер j_M, начиная с которого гипотезы H_j ($j > j_M$) становятся неразличимы, то j_M будет определять максимальное число разрешимых сигналов.

Предполагая, что для всех сигналов и помех выполнены те же условия, что и выше, запишем корреляционную матрицу каждого из векторов v_i ($i=1, 2, ..., T$) для гипотезы H_j:

$$K_j = nN + \sum_{k=1}^{j} s_k S_k, \tag{10}$$

причем модули коэффициентов корреляции, входящие в матрицы S_k, совпадают для всех сигналов. Как и для случая разрешения двух сигналов, будем считать, что матрицы N и S_k ($k=1, 2, ...$) заданы, однако предположение о том, что мощности сигналов известны, использовать не будем. В этом случае функция распределения сигналов $w_j(v)$ имеет вид, аналогичный (7), и зависит от ($j+1$) неизвестных параметров.

Рассмотрим две близкие гипотезы H_j и H_{j+1}. Для выбора одной из гипотез при наличии неизвестных параметров рассмотрим отношение максимумов функций правдоподобия:

$$L_M = \max_{\lambda_{j+1}} w_{j+1}(v) / \max_{\lambda_j} w_j(v), \tag{11}$$

где через λ_j и λ_{j+1} обозначены все неизвестные параметры, входящие в $w_j(v)$ и $w_{j+1}(v)$. Максимумы функций $w_j(v)$ и $w_{j+1}(v)$ можно искать непосредственно, используя вид корреляционной матрицы (10). Однако можно применить другой метод. Заметим, что матрицы N, S_k ($k=1, 2, ...$), а следовательно и K_j, являются в общем случае эрмитовыми, причем модули элементов этих матриц можно записать в виде

$$\nu_{lm} = \nu_p;\ \mu_{lm} = \mu_p;\ p = |l - m|;\ p = 0, 1, \ldots .$$

Введем матрицы

$$H_{-p} = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots 1 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad H_p = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

$$p = -(M-1),\ -(M-2),\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ (M-2),\ (M-1).$$

В матрице H_{-p} отлична от нуля нижняя p-я околодиагональ, а в матрице H_p — верхняя p-я околодиагональ. Кроме того, $H_0=E$. Любую из матриц K_j можно представить с помощью матриц H_p в виде

$$K_j = \sum_{p=-(M-1)}^{(M-1)} \rho_p H_p. \tag{12}$$

При нахождении максимума функции $w_j(v)$ можно пользоваться (12), считая ρ_p неизвестными параметрами (в общем случае комплексными), которые для гипотез H_j удовлетворяют уравнениям связи

$$\rho_p = n\nu_p + \mu_p \sum_{k=1}^{j} s_k e^{ip\varphi_k};\ p = -(M-1), \ldots, 0, \ldots, (M-1), \tag{13}$$

общее число которых составляет $(2M-1)$. Однако, как нетрудно заметить, если число сигналов j в (13) превосходит $j_M=2(M-1)$, величина максимума функции $w_j(v)$ $(j \geqslant j_M)$ перестает зависеть от того, какая из гипотез H_j $(j \geqslant j_M)$ рассматривается. Таким образом, $j_M = 2(M-1)$ определяет максимальное число сигналов, разрешимых с помощью линейной эквидистантной решетки.

Подобным же образом можно оценить число сигналов, разрешимых с помощью плоской антенной решетки с произвольным расположением элементов. Оказывается, что в этом случае j_M зависит от количества различных пространственных частот F, реализуемых с помощью рассматриваемой апертуры, причем $j_M \sim 2F$. Этот результат легко понять, если учесть, что число j_M фактически определяется количеством различных элементов корреляционной матрицы принимаемых сигналов. Заметим, что полученные оценки j_M совпадают с оценками для оптических и радиоастрономических систем в [4].

Рассмотрим теперь алгоритмы обработки сигналов с антенной решетки, которые позволяют получить разрешающую способность близких сигналов, приближающуюся к потенциальной. Пусть имеются два источника сигналов, для которых справедливы условия (1)—(5) с той лишь разницей, что их мощности и угловое расстояние между ними неизвестны. Для принятия решения о наличии двух сигналов рассмотрим неравенство, полученное на основе (11) при $j=1$:

$$L_M = \max_{\lambda_2} w_2(v) / \max_{\lambda_2} w_1(v) > L_0. \tag{14}$$

В (14) плотность распределения $w_1(v)$ соответствует альтернативной гипотезе H_1, которая рассматривалась при оценке $\Delta_{\text{пот}}$, а величина порога L_0 определяется вероятностью принятия неправильного решения при условии, что истинной является гипотеза H_1.

Каждую из корреляционных матриц S_1 и S_2 можно записать в виде

$$S_{1,2} = \| \mu_{lm} e^{i(l-m)(\varphi \pm \Delta)} \|.$$

Тогда при выполнении условия (5)

$$S_k = S \pm \Delta S'_\varphi - \frac{1}{2} \Delta^2 S''_{\varphi\varphi}; \; k = 1, \; 2;$$

$$K_2 \simeq K_1 - \frac{1}{2} s \varepsilon S''_{\varphi\varphi},$$

где $\varepsilon = \Delta^2$ — «малый» параметр. Алгоритм разрешения с помощью отношения (14) при наличии «малого» информативного параметра приводится к виду [8]

$$\hat{\varepsilon}^2 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2 > 2 \ln L_0. \tag{15}$$

В (15) $\hat{\varepsilon}$ — оценка максимального правдоподобия параметра ε, а $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ — оценка дисперсии этой оценки.

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться (15), необходимо иметь также оценки максимального правдоподобия параметров s и n при гипотезе H_1 (обозначение $\hat{s}_1$, $\hat{n}_1$) и гипотезе H_2 (обозначение $\hat{s}_2$, $\hat{n}_2$).

Способы получения этих оценок рассматривались в [5], где отмечалось, что в аналитическом виде оценки параметров s, n можно получить лишь для случаев слабых или сильных сигналов, однако эти оценки оказываются несмещенными во всех промежуточных ситуациях. Рассматривая, например, случай слабых сигналов ($s \ll n$), получим следующие системы уравнений для $\widehat{s}_1$, $\widehat{n}_1$:

$$\mathrm{Sp}\,[N^{-1}(W/T-\widehat{n}_1 N-\widehat{s}_1 S)]=0,$$
$$\mathrm{Sp}\,[N^{-1}SN^{-1}(W/T-\widehat{n}_1 N-\widehat{s}_1 S)]=0, \tag{16}$$

и для $\widehat{s}_2$, $\widehat{n}_2$, $\widehat{\varepsilon}$:

$$\mathrm{Sp}\left[N^{-1}\left(W/T-\widehat{n}_2 N-\widehat{s}_2 S+\frac{1}{2}\widehat{s}_2\,\widehat{\varepsilon}\,S''_{\varphi\varphi}\right)\right]=0,$$
$$\mathrm{Sp}\left[N^{-1}SN^{-1}\left(W/T-\widehat{n}_2 N-\widehat{s}_2 S+\frac{1}{2}\widehat{s}_2\,\widehat{\varepsilon}\,S''_{\varphi\varphi}\right)\right]=0, \tag{17}$$
$$\mathrm{Sp}\left[N^{-1}S''_{\varphi\varphi}N^{-1}\left(W/T-\widehat{n}_2 N-\widehat{s}_2 S+\frac{1}{2}\widehat{s}_2\,\widehat{\varepsilon}\,S''_{\varphi\varphi}\right)\right]=0.$$

Из системы (17) можно найти выражение для произведения оценок:

$$\frac{1}{2}\widehat{s}_2\,\widehat{\varepsilon}=\frac{1}{\alpha}\mathrm{Sp}\,[AW/T]. \tag{18}$$

В (18) α — числовой коэффициент, а матрица A определяется видом корреляционных матриц N, S и $S''_{\varphi\varphi}$. Заметим, что правая часть (18) представляет собой квадратичную форму от элементов векторов v_i ($i=1, 2, ..., T$). Для нахождения оценки дисперсии на основании [8] необходимо рассмотреть матрицу

$$R=-\left\|\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\,\partial\lambda_j}\ln w_2(v/\widehat{n}_1,\,\widehat{s}_1\;0)\right\|. \tag{19}$$

В (19) через λ_i ($i=1, 2, 3$) обозначены параметры n, s, ε, т. е. $\lambda_1=n$; $\lambda_2=s$; $\lambda_3=\varepsilon$ и производные от логарифма функции правдоподобия берутся в точке $n=\widehat{n}_1$; $s=\widehat{s}$; $\varepsilon=0$. Тогда оценка дисперсии $\widehat{\sigma}^2_\varepsilon$ определяется элементом матрицы R^{-1}, стоящим на месте элемента $r_{33}=\partial^2/\partial\varepsilon^2 \ln w_2(v)$ в матрице R.

Сделав приближенную замену (при больших значениях параметра накопления T) $W\simeq T(\widehat{n}_1 N+\widehat{s}_1 S)$, получим выражение для $\widehat{\sigma}^2_\varepsilon$:

$$\widehat{\sigma}^2_\varepsilon=\widehat{n}_1^2\,\beta\Big/\left(\frac{T}{2}\right)\left(\frac{\widehat{s}_1}{2}\right)^2\cdot\alpha,$$

где β — числовой коэффициент, а $\widehat{n}_1$ и $\widehat{s}_1$ удовлетворяют системе уравнений (16). Считая, что произведение оценок $\widehat{s}_2\widehat{\varepsilon}$ мало отличается от $\widehat{s}_1\widehat{\varepsilon}$, можно алгоритм разрешения (15) представить в виде

$$\frac{1}{2}\widehat{s}_2\,\widehat{\varepsilon}>\frac{\widehat{n}_1(\beta/\alpha)^{1/2}(2\ln L_0)^{1/2}}{(T/2)^{1/2}}. \tag{20}$$

Оценка n_1, получаемая из системы (16), имеет вид

$$\widehat{n}_1=1/\beta\,\mathrm{Sp}\left[\frac{BW}{T}\right], \tag{21}$$

где B — матрица, определяемая видом N и S. Тогда, подставив (18) и (21) в (20), получим

$$\mathrm{Sp}\,[(A-\lambda B)W]>0, \tag{22}$$

где

$$\lambda=2\,(\ln L_0)^{1/2}\,\alpha/T^{1/2}\,\beta.$$

Таким образом, алгоритм разрешения сводится к формированию квадратичной формы от элементов исходной выборки и определению ее знака.

Для оценки возможностей алгоритма (22) предположим, что истинной является гипотеза H_2. Тогда, приближенно заменив W при $T\gg 1$ ее средним значением $\langle W\rangle = TK_2$, из (22) получим неравенство для Δ:

$$\Delta \geqslant (2\lambda)^{1/2} \Big/ \left(\frac{s}{n}\right)^{1/2}.$$

Непосредственная оценка λ при большом числе входов антенной решетки ($M\gg 1$) дает

$$\lambda \sim 1/T^{1/2}M^3,$$

откуда видно, что для Δ справедлива оценка

$$\Delta \geqslant 1/M\left(M\,\frac{s}{n}\right)^{1/2} T^{1/4},$$

совпадающая с оценкой потенциально разрешающей способности (9). Таким образом, используя алгоритм разрешения (22) при достаточно большом времени усреднения T, можно превысить рэлеевский предел разрешающей способности и обеспечить разрешающую способность, близкую к потенциальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971, с. 322—342.
2. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. М., 1977, с. 355—367.
3. Hasforts I., Mogan J. M. Detection and estimation practices in radio and radar astronomy.— Proc. IEEE, 1970, **58**, N 5, p. 743—759.
4. Синцов В. Н., Запрягаев А. Ф. Апертурный синтез в оптике. — Успехи физ. наук, 1974, **114**, вып. 4, с. 655—676.
5. Буров В. А., Дмитриев О. В. Применение метода максимального правдоподобия в задаче обнаружения шумовых сигналов.— Радиотехника и электроника, 1973, **18**, № 6, с. 1276—1279.
6. Буров В. А., Дмитриев О. В. О потенциальной разрешающей способности антенных решеток.— Радиотехника и электроника, 1975, **18**, № 3, с. 518—523.
7. Cox H. Resolving power and sensitivity mismatch of optimum array processors.— JASA, 1973, **54**, N 3, p. 771—786.
8. Буров В. А., Дмитриев О. В. Классификация по слабым признакам методом максимального правдоподобия.— Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1973, **14**, № 6, с. 662—666.

Поступила в редакцию
01.12.78