(b, γ-γ).— Comp. Phys. Comm., 1973, 6, p. 99—131. *8.* Kratschmer W., Klapdor H. V. Electromagnetic transition probabilities between the low—lying states of ^{203}Tl, ^{205}Tl and ^{209}Bi.— Nucl. Phys., 1973, **A201**, N 1, p. 179—192. *9.* Krane K. S., Steffen R. M. Determination of the E2/M1 multipole mixing ratios of the gamma transitions in ^{110}Cd.— Phys. Rev., 1970, **C2**, N 2, p. 724—734. *10.* Сборник физических констант. Под ред. Дорфмана Я. Г. и Фриша С. Э. Л., 1937, с. 463—464.

Поступила в редакцию
09.01.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 1

УДК 530.145

Ф. Я. ХАЛИЛИ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

В ряде современных физических экспериментов, в частности в экспериментах по обнаружению гравитационных волн, требуемая чувствительность измерительных устройств такова, что процесс измерения должен описываться с учетом квантовых эффектов [1—3]. В связи с этим необходим метод расчета, который бы позволял достаточно просто определять предельные возможности квантовых измерительных устройств.

Как правило, весь процесс измерения сводится к одной из двух следующих процедур (или является их комбинацией):

а) в исследуемой системе в моменты времени $t_1, \ldots, t_l$ измеряются величины $x_1, \ldots, x_l$ с ошибками, равными $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ соответственно, причем одновременно исследуемая система эволюционирует свободно или под действием некоторого внешнего воздействия; на основании полученного в результате набора чисел $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l$ требуется оптимальным образом оценить значение величины $\mathcal{F}$, которая может относиться к начальному состоянию исследуемой системы, к внешнему воздействию на нее и т. д.;

б) в исследуемой системе в течение времени $t_и$ непрерывно с некоторой погрешностью контролируется значение некоторой переменной $x(t)$; на основании полученной реализации случайной функции $\tilde{x}(t)$ требуется также оценить величину $\mathcal{F}$. Сначала мы рассмотрим случай *а*, затем полученные результаты будут обобщены на случай *б*.

Для описания приближенных квантовых измерений в [4] был предложен следующий метод. Измерение величины x с точностью σ рассматривается как одновременное точное измерение набора коммутирующих операторов вида

$$\hat{E}_j = \int\limits_x |x\rangle E(x_j - x) \langle x| dx, \tag{1}$$

где $|x\rangle$, x — собственные векторы и собственные значения оператора $\hat{x}_j$, $x_j = x_{j-1} + \sigma$,

$$E(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \dfrac{\sigma}{2}, \\ 1 & |x| < \dfrac{\sigma}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Символом $\int\limits_x$ обозначено суммирование по всему набору собственных значений оператора $\widehat{x}$.

В результате такого измерения для одного из операторов (1), скажем, $\widehat{E}_{j_0}$, будет получен результат единица, а для всех остальных — ноль, откуда следует, что значение величины x лежит в интервале $(x_{j0}-\sigma/2,\ x_{j0}+\sigma/2)$. Априорная вероятность этого события равна

$$W_{j_0} = \mathrm{Sp}\,(\widehat{E}_{j_0}\ \widehat{\rho}_0), \tag{3}$$

где $\widehat{\rho}_0$ — оператор плотности начального состояния исследуемой системы. После измерения исследуемая система перейдет в состояние

$$\widehat{\rho}_{j_0} = \frac{1}{W_{j_0}} \widehat{E}_{j_0} \widehat{\rho}_0\ \widehat{E}_{j_0}. \tag{4}$$

Операторы вида (1) описывают не все возможные виды приближенных квантовых измерений. Действительно, из [5] следует, что среднеквадратичное возмущение сопряженной с x величины p может в зависимости от конкретной структуры измерения иметь любое допустимое с точки зрения соотношения неопределенностей значение. В то же время в состоянии (4) дисперсия p всегда бесконечна, что связано с разрывным характером функции (2).

Операторы (1) можно обобщить, если вместо ступенчатой функции (2) использовать гладкую функцию $\Omega(x)$, существенно отличную от нуля лишь при $|x| < \sigma/2$. Полученные операторы мы обозначим $\widehat{\Omega}(\vec{x})$, где $\vec{x}$ — число, являющееся результатом приближенного измерения ($\vec{x}$ может быть равно любому из собственных значений оператора $\widehat{x}$). Формулы, аналогичные (3)—(4), в новых обозначениях будут иметь следующий вид:

$$W(\vec{x}) = \mathrm{Sp}\,(\widehat{\Omega}^2(\vec{x})\cdot\widehat{\rho}_0), \tag{5}$$

$$\widehat{\rho}\ (\vec{x}) = \frac{1}{W(\vec{x})} \widehat{\Omega}\,(\vec{x})\,\widehat{\rho}_0\,\widehat{\Omega}\,(\vec{x}). \tag{6}$$

Среднеквадратичное возмущение p будет при этом, как нетрудно показать, равно

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \hbar^2 \int\limits_x \left(\frac{d\,\Omega\,(x)}{dx}\right)^2 dx. \tag{7}$$

При заданной ошибке измерения σ величина (7) в зависимости от формы функции $\Omega(x)$ может принимать любое значение от бесконечности до $\hbar^2/4\sigma^2$. Возмущение минимально, если функция Ω имеет гауссов вид:

$$\Omega\,(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}. \tag{8}$$

Обычно к измерительному аппарату предъявляется требование, чтобы он минимально возмущал исследуемую систему. Это особенно существенно, когда последовательно измеряется несколько некоммутирующих величин. В этом случае функция вида (8) будет соответствовать оптимально сконструированному аппарату. В дальнейшем будем предполагать, что условие (8) выполняется.

Функция $\Omega(x)$ характеризует априорную плотность вероятности получить в результате измерения число $\vec{x}$, если перед измерением значение измеряемой величины было равно x. Действительно, если

$$\widehat{\rho}_0 = |x\rangle\langle x|, \tag{9}$$

то из (5) следует, что

$$W(\vec{x}) = \Omega^2(\vec{x} - x). \tag{10}$$

Заметим, что, для того чтобы функция (10) действительно была распределением вероятностей, должны выполняться следующие условия:

$$\int\limits_x \Omega^2(x)\,dx = 1, \tag{11}$$

$$\int\limits_x \Omega^2(x)\,x\,dx = 0, \tag{12}$$

$$\int\limits_x \Omega^2(x)\,x^2\,dx = \sigma^2. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь измерительную процедуру a, описанную выше. Наиболее полно она характеризуется совместным априорным распределением вероятностей для результатов измерений при заданном начальном состоянии системы и заданном внешнем воздействии на нее. С учетом (5), (6) оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_l) = \mathrm{Sp}\,(\widehat{\Omega}_l(\vec{x}_l)\cdot U_l\cdot \ldots \cdot \widehat{\Omega}_1(\vec{x}_1)\cdot \widehat{U}_1 \times \\ \times \widehat{\rho}_0\cdot \widehat{U}_1^{+}\cdot \widehat{\Omega}_1(\vec{x}_1)\cdot \ldots \cdot \widehat{U}_l^{+}\cdot \widehat{\Omega}_l(\vec{x}_l)), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\widehat{\Omega}_j(\vec{x}_j)$ — оператор j-го измерения, $\widehat{U}_j$ — оператор эволюции исследуемой системы на интервале времени (t_{j-1}, t_j). Нахождение явного вида (14), как правило, является весьма сложной задачей, однако обычно бывает необходимо знать лишь моменты первых двух порядков этого распределения, для которых при некотором ограничении общности можно получить простые формулы.

Предположим, что коммутаторы всех операторов вида

$$\widehat{x}_j(t_j) = \widehat{U}_1^{+}\cdot \ldots \cdot \widehat{U}_j^{+}\cdot \widehat{x}_j\cdot \widehat{U}_j\cdot \ldots \cdot \widehat{U}_1 \tag{15}$$

между собой являются C-числами:

$$[\widehat{x}_j(t_j), \widehat{x}_{j'}(t_{j'})] = i\mathcal{K}_{jj'}. \tag{16}$$

Тогда можно показать, что

$$\langle \vec{x}_j\rangle = \langle \widehat{x}_j(t_j)\rangle_0, \tag{17}$$

$$\langle \Delta\vec{x}_j\cdot\Delta\vec{x}_{j'}\rangle = \langle\{\Delta\widehat{x}_j(t_j)\cdot\Delta\widehat{x}_{j'}(t_{j'})\}\rangle_0 + \sigma_j^2\delta_{jj'} + \sum_{i=1}^{\min\{j,j'\}} \frac{\mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}_{ij'}}{4\sigma_i^2}, \tag{18}$$

где

$$\Delta\vec{x}_j \equiv \vec{x}_j - \langle\vec{x}_j\rangle, \tag{19}$$

а

$$\langle\widehat{Q}\rangle_0 \equiv \mathrm{Sp}\,(\widehat{Q}\,\widehat{\rho}_0)$$

$$\{\widehat{Q}\cdot\widehat{R}\} \equiv \frac{1}{2}(\widehat{Q}\,\widehat{R} + \widehat{R}\,\widehat{Q}) \tag{20}$$

$$\Delta\widehat{Q} \equiv \widehat{Q} - \langle\widehat{Q}\rangle_0$$

для любых операторов $\widehat{Q}$, $\widehat{R}$.

Предположим, что величина $\mathcal{F}$ замкнутым образом выражается через операторы (15):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\widehat{x}_1(t_1), \ldots, \widehat{x}_l(t_l)), \tag{21}$$

т. е. не зависит от начального состояния исследуемой системы. Фактически это предположение не ограничивает общности рассмотрения, так как всякое начальное состояние готовится при помощи некоторой последовательности измерений, которую можно включить в основную последовательность как ее часть.

Разложим функцию (21) в ряд Тейлора, оставив лишь линейные по $\Delta\widehat{x}_j$ члены:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \sum_{j=1}^{l} \mathcal{F}_j \cdot \Delta\widehat{x}_j(t_j), \tag{22}$$

где

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\langle\vec{x}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{x}_l\rangle),$$
$$\mathcal{F}_j = \frac{\partial\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_l)}{\partial x_j}\Bigg|_{\substack{x_1 = \langle\vec{x}_1\rangle \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x_l = \langle\vec{x}_l\rangle}}. \tag{23}$$

В этом приближении несмещенной, а следовательно, и оптимальной при квадратичном критерии качества [6] оценкой $\mathcal{F}$ будет

$$\vec{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_l). \tag{24}$$

Погрешность оценивания при этом будет равна с учетом (17), (18)

$$\langle(\Delta\mathcal{F})^2\rangle = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{F}_j^2\sigma_j^2 + \sum_{j,j'=1}^{l} \mathcal{F}_j\mathcal{F}_{j'} \sum_{i=1}^{\min\{j,j'\}} \frac{\mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}_{ij'}}{4\sigma_i^2}. \tag{25}$$

Полученные соотношения можно обобщить и на случай *б*. Предположим, что операторы $\widehat{x}_1(t_1), \ldots, \widehat{x}_l(t_l)$ являются значениями гейзенберговского оператора $\widehat{x}(t)$ в соответствующие моменты времени, причем интервалы времени между измерениями меньше характерного периода изменения величины $x(t)$. Введем функцию $\sigma(t)$, значения которой определяются по правилу:

$$\sigma^2(t_j) = \frac{\sigma_j^2 t_{\text{и}}}{l}. \tag{26}$$

Перейдем к пределу при $l \to \infty$, $\sigma_j \to \infty$ таким образом, чтобы значения (26) оставались постоянными. Результаты измерений при этом образуют функцию $\vec{x}(t)$, а вместо разложения (23) получим функционал

$$\mathcal{F}[\widehat{x}(t)] = \mathcal{F}_0 + \int_0^{t_{\text{и}}} \mathcal{F}(t)\cdot\Delta\widehat{x}(t)\,dt. \tag{27}$$

Выражение для погрешности измерения при этом будет иметь следующий вид:

$$\langle(\Delta\mathcal{F})^2\rangle = \int_0^{t_{\text{и}}} \mathcal{F}^2(t)\,\sigma^2(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{t_{\text{и}}} dt\,dt'\,\mathcal{F}(t)\,\mathcal{F}(t') \int\limits_0^{\min\{t,t'\}} dt_1\, \frac{\mathcal{K}(t_1, t)\,\mathcal{K}(t_1, t')}{4\sigma^2(t_1)}, \tag{28}$$

где

$$\mathcal{K}(t_1, t) = \frac{1}{i}\,[\hat{x}(t_1), \hat{x}(t)]. \tag{29}$$

Формулы (25) и (29), несмотря на кажущуюся громоздкость, удобны для решения конкретных задач. Для расчетов с их помощью не нужно знать, как меняется оператор плотности исследуемой системы в процессе измерения. Необходимо лишь решить гейзенберговские уравнения движения исследуемой системы для операторов измеряемых величин, что, как правило, значительно проще.

Оба слагаемых в правых частях (25), (29) имеют простой физический смысл. Первые являются непосредственным следствием приближенного характера измерений. Вторые имеют существенно квантовую природу; они возникают из-за неконтролируемого возмущения исследуемой системы в процессе измерения (флуктуационное влияние измерительного прибора).

Приведем пример применения полученного метода, представляющий собой также и некоторый самостоятельный интерес. Рассмотрим гармонический осциллятор, у которого непрерывно (в течение времени $t_{\text{и}}$) с постоянной точностью контролируется его текущая координата

$$x(t) = x_0 + x\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t \tag{30}$$

(x_0 — координата точки равновесия, p и x — начальные импульс и смещение осциллятора, m и ω — его масса и частота). Найдем, с какой точностью можно по результатам такого измерения определить среднее за время измерения значение координаты осциллятора $\bar{x}$.

Функционал (27) в этом случае будет равен, очевидно,

$$\bar{x} = \frac{1}{t_{\text{и}}} \int\limits_0^{t_n} \hat{x}(t)\,dt. \tag{31}$$

Подставив (31) в (28) и полагая $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$, получим, что при оптимальном значении σ_0 ошибка измерения равна

$$\langle(\Delta\bar{x})^2\rangle = \frac{\hbar}{m\omega^2 t_{\text{и}}} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\omega t_{\text{и}}}\sin\omega t_{\text{и}} + \frac{\sin 2\omega t_{\text{и}}}{4\omega t_{\text{и}}}\right)^{1/2}. \tag{32}$$

При выводе (32) учтено, что

$$[\hat{x}(t),\ \hat{x}(t')] = \frac{i\hbar}{m\omega}\sin\omega(t' - t). \tag{33}$$

Рассмотрим два полезных частных случая.

1) $\omega t_{\text{и}} = 2\pi n$, n — целое. В этом случае $\bar{x}$ совпадает с x_0. Следовательно, ошибка измерения координаты точки равновесия осциллятора данным методом равна

$$\langle(\Delta x_0)^2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\hbar}{m\omega^2 t_{\text{и}}}. \tag{34}$$

2) $\omega t_{\text{и}} \ll 1$. Формула (33) при этом принимает следующий вид:

$$\langle(\Delta\bar{x})^2\rangle = \frac{\hbar t_{\text{и}}}{2\sqrt{5}\,m}. \tag{35}$$

Формула (35) представляет собой выражение для минимальной ошибки измерения средней (за время измерения) координаты свободной частицы, так как на временах много меньше периода осциллятор ведет себя как свободная частица.

Автор благодарен проф. В. Б. Брагинскому и канд. физ.-мат. наук Ю. И. Воронцову за полезные обсуждения результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Оптимальные квантовые измерения в детекторах гравитационного излучения.— Письма в ЖЭТФ, 1978, 27, с. 296—301. *2.* Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Квантовые особенности пондеромоторного измерителя электромагнитной энергии.— ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1340—1343. *3.* Thorne K. S., Drever R. W. P., Coves M. C., Zimmerman M., Sandberg V. D. Quantum nondemolition measurements of a harmonic oscillator.— Phys. Rev. Lett., 1978, 40, p. 667—670. *4.* Нейман И. Математические основы квантовой механики. М., 1964, 367 с. *5.* Лэмб У. Измерения в квантовой механике и интерпретация нерелятивистской квантовой механики.— УФН, 1969, 99, № 4, 718—729. *6.* Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга 2. М., 1975, 391 с.

Поступила в редакцию
01.11.78

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 1

УДК 621.385.6

Ф. А. КОРОЛЕВ, Ф. М. АБДУЛХАИРОВ, А. В. ТУЛУПОВ

К РАСЧЕТУ ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПУШКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВИНТОВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В МЦР С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ЧАСТОТОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Одним из основных вопросов эффективной работы мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) [1] является получение винтовых электронных потоков (ВЭП), имеющих при попадании в область взаимодействия с высокочастотным полем резонатора наибольшее значение отношения вращательной скорости электрона к поступательной. Для создания ВЭП в экспериментальных моделях МЦР использовались различные конструкции электронно-оптических систем [2—4]. Рассматриваемая нами система для формирования ВЭП изображена на рис. 1, здесь также показано распределение магнитного поля вдоль оси системы. Приближенный анализ подобной системы в слабонеоднородных полях приведен в [4].

В данной работе предложен метод расчета трехэлектродной электронно-оптической системы для формирования ВЭП, являющейся, на наш взгляд, наиболее целесообразной в МЦР с перестраиваемой частотой генерации, позволяющей обеспечить наиболее оптимальное значение отношения поперечной скорости электрона к продольной при изменении магнитного поля. В расчетах учитывается характер распределения электрических полей между электродами системы, влияние пространственного заряда не рассматривается.

Процесс движения электронов с момента вылета с поверхности катода и до попадания в резонатор условно подразделяется на четыре этапа (см. рис. 1).