УДК 534.222.2:551.596.1

ОЦЕНКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ В АТМОСФЕРЕ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. Н. Куличков

(кафедра физики атмосферы)

В нелинейной акустике подробно исследованы эффекты, возникающие при распространении в сплошных средах звуковых волн конечной амплитуды [1—3]. К наиболее характерным нелинейным эффектам относится образование ударной волны, появление постоянной составляющей и генерация разностной гармоники. Указанные эффекты могут заметно проявляться в условиях реальной атмосферы. При вертикальном распространении звуковых волн амплитуда колебательной скорости растет с высотой как $\rho^{-1/2}$; кроме того, наблюдается также заметное искажение ее профиля. Полупериод, где значение скорости отрицательно, становится меньше π, полупериод, где значение скорости положительно, уширяется [4]. При этом амплитуда скорости на больших расстояниях от источника стремится к некоторому постоянному значению, определяемому отношением длины волны к высоте однородной атмосферы [5]. Явление же генерации разностной гармоники, как нам известно, подробно не исследовалось.

В случае однородной среды, при рассмотрении процесса генерации разностной гармоники в рамках трехмодового взаимодействия, наблюдается эффект перекачки энергии от разностной гармоники к первичным [1]. Задачей настоящей работы является исследование процесса генерации разностной звуковой частоты при вертикальном распространении в атмосфере немонохроматического звукового излучения, а также проведение сравнительного анализа различных возникающих при этом эффектов с целью выяснения оптимальных условий преобразования наземного немонохроматического звукового излучения в низкочастотное в верхних слоях атмосферы.

Исследование будем проводить в приближении трехволнового взаимодействия при учете образования разрывов в первичном излучении.

1. Уравнение, описывающее распространение акустических волн вертикально вверх в атмосфере, имеет вид (см. [5]):

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\beta}{2} v - \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial v^2}{\partial \tau} - \frac{\nu_0 \exp\left\{\int_0^z \beta\, dz\right\}}{2c_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \qquad (1)$$

где v — вертикальная скорость; z — вертикальная координата; $\tau = t - z/C_0$; ν_0 — коэффициент молекулярной диссипации; $\beta = 1/H$; H — высота однородной атмосферы.

Запишем уравнение (1) в безразмерной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial X} - 2\varepsilon \frac{M_0}{\sigma} U \frac{\partial U}{\partial \Theta} - \frac{Kn}{d^2}(X+1) \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} = 0, \qquad (2)$$

где

$$\Theta = \omega\tau;\ X = \exp\left\{\int_0^z \frac{\beta}{2}\,dz\right\} - 1,$$

$$v = U_0 U \exp\left\{\int_0^z \frac{\beta}{2}\,dz\right\};\quad \alpha = \frac{\lambda}{2\pi H};\quad M_0 = \frac{U_0}{c_0}, \tag{3}$$

$\mathrm{Kn} = l_0/H$ — число Кнудсена, $l_0 = \nu_0/c_0$ — длина свободного пробега молекул.

Из (2) и (3) видно, что в линейном приближении, начиная с некоторого расстояния z, диссипация преобладает над неоднородностью и наблюдается сильное затухание, так что эффекты, связанные с плотностным расслоением, становятся несущественными. Это расстояние в безразмерной форме будет иметь вид:

$$(X+1)_{\text{зат}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Kn}}}. \tag{4}$$

Заметим также, что уравнение (2) в случае, когда $\nu = \nu_0(X+1)$, является уравнением Бюргерса и допускает образование ударной волны в первичном излучении, начиная с некоторого расстояния $(X+1)_{\text{р}}$ (см. [1]), которое в наших обозначениях имеет вид

$$(X+1)_{\text{р}} = \frac{\alpha}{2\varepsilon M_0}. \tag{5}$$

2. Рассмотрим процесс генерации разностной компоненты при вертикальном распространении в атмосфере немонохроматического звукового излучения до расстояний образования ударных волн $(X+1)_{\text{р}}$. Как уже отмечалось выше, решение уравнения (2) будем проводить в рамках трехмодового взаимодействия аналогично методу, изложенному в [1]. Будем искать решение для U в виде

$$U = A_1(X)\sin\Theta_1 + A_2(X)\sin\Theta_2 - A_3(X)\sin\Theta_3, \tag{6}$$

где

$$\Theta_i = \omega_i\tau;\ i = 1,\ 2,\ 3;\ \omega_3 = \omega_1 - \omega_2. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (2) и проводя соответствующие преобразования, получим для резонансных мод, удовлетворяющих (7), уравнения вида

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{A}_1}{dX} &= -b_1 \exp\left[\frac{m_1 - m_2 - m_3}{2}(X+1)^2\right]\widetilde{A}_2\,\widetilde{A}_3,\\
\frac{d\widetilde{A}_2}{dX} &= b_2 \exp\left[\frac{m_2 - m_1 - m_3}{2}(X+1)^2\right]\widetilde{A}_1\widetilde{A}_3,\\
\frac{d\widetilde{A}_3}{dX} &= \frac{b_1 + b_2}{2}\exp\left[\frac{m_3 - m_1 - m_2}{2}(X+1)^2\right]\widetilde{A}_1\,\widetilde{A}_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_{1,2} = \widetilde{A}_{1,2}\exp\left[-\frac{m_{1,2}}{2}(X+1)^2\right];$$

$$A_3 = \left(\frac{2\omega_3}{\omega_1+\omega_2}\right)^{1/2}\widetilde{A}_3\exp\left[-\frac{m_3(X+1)^2}{2}\right], \tag{9}$$

$$b_{1,2} = \frac{\varepsilon M_0}{\alpha_{1,2}}\left(\frac{2\omega_3}{\omega_1+\omega_2}\right)^{1/2};\quad m_i = \frac{\mathrm{Kn}}{\alpha_i^2};\quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{10}$$

Точное решение системы (8) в аналитической форме получить нельзя, поэтому мы будем решать (8) в приближении малой вязкости:

$$m_{1,2}(X+1) \ll b_{1,2}. \tag{11}$$

Из (8) при условии (11) можно получить следующие соотношения между различными $\widetilde{A}_i$:

$$\widetilde{A}_1^2 \simeq \exp\left[(m_1 - m_2)(X+1)^2\right] \times \left[1 - \frac{b_1}{b_2}(\widetilde{A}_2^2 - 1)\right],$$
$$\widetilde{A}_3^2 \simeq \exp\left[-(m_2 - m_3)(X+1)^2\right] \times [\widetilde{A}_2^2 - 1]\,\frac{b_1 + b_2}{2b_3}. \tag{12}$$

Мы полагали, что амплитуды первичных волн A_1 и A_2 одинаковы и в безразмерной форме равны единице.

Подставляя (12) во второе уравнение системы (8) и проводя преобразования аналогично [1], получим следующие выражения для A_i, записанные с помощью эллиптических функций:

$$A_1 = \exp\left[-\frac{m_2(X+1)^2}{2}\right] \operatorname{sn}\left[\mathrm{K}(\mathrm{k}) - \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}\,y\right],$$
$$A_2 = \sqrt{\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1}} \exp\left[-\frac{m_2(X+1)^2}{2}\right] \operatorname{dn}\left[\mathrm{K}(\mathrm{k}) - \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}\,y\right], \tag{13}$$
$$A_3 = \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1}} \exp\left[-m_2\frac{(X+1)^2}{2}\right] \operatorname{cn}\left[\mathrm{K}(\mathrm{k}) - \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}\,y\right],$$

где

$$y = \int_0^X \exp\left[-\frac{m_2(X+1)^2}{2}\right] dX, \tag{14}$$

$k^2 = b_2/(b_1+b_2)$; $\mathrm{K}(\mathrm{k})$ — эллиптический интеграл.

Из (13) видно, что без учета образования разрывов в первичном излучении амплитуда разностной гармоники может достигать максимального значения на некотором расстоянии от источника и станет возможным процесс перекачки энергии от разностной гармоники к первичным.

Имеем

$$(X+1)_{\text{п}} = 1 + \frac{\mathrm{K}(\mathrm{k})\,\alpha_3}{\varepsilon M_0}\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2}} \sim \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_3}}\,(X+1)_{\text{р}}. \tag{15}$$

3. Рассмотрим процесс генерации разностной гармоники в области после образования разрывов в первичном излучении, $(X+1) \geqslant (X+1)_{\text{р}}$.

Выше отмечалось, что уравнение (2) в случае $\nu \sim \nu_0(X+1)$ имеет вид уравнения Бюргерса, решение которого при $(X+1)_{\text{р}} < (X+1)$ можно записать аналогично решению Фея [1]:

$$U = \frac{kl_0}{\varepsilon M_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\Theta}{\operatorname{sh}\left(\pi n \dfrac{L}{2}\right)}, \tag{16}$$

где

$$L = (1 + BX)\frac{2l_0}{\varepsilon M_0 \lambda}; \quad B = 1/X_{\text{р}}.$$

Из (16) видно, что в случае наличия диссипации скачки амплитуды скорости в окрестности ударного фронта сглаживаются. При этом амплитуда первой гармоники изменяется с расстоянием $1/\mathrm{sh}\left(\frac{\pi L}{2}\right)$.

Будем считать, что после образования разрывов амплитуды первичных волн изменяются в основном в результате генерации своих высших гармоник, а не из-за генерации разностной волны. В указанном приближении ищем решение (2) в области после образования разрывов в первичном излучении в виде

$$U = \frac{k_1 l_0}{\varepsilon M_0} \frac{\sin \Theta_1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi L_1}{2}\right)} + \frac{k_2 l_0}{\varepsilon M_0} \frac{\sin \Theta_2}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi L_2}{2}\right)} - U_3(X) \sin \Theta_3. \quad (17)$$

В целях упрощения выкладок будем предполагать, что характер нелинейных искажений для первичных волн приблизительно одинаков, т. е. в (17) положим $k_1 \simeq k_2 \simeq k = (k_1 + k_2)/2$. При указанном предположении можно пренебречь затуханием разностной гармоники из-за молекулярной диссипации. Подставляя (17) в (2) при учете $\Theta_3 = \Theta_1 - \Theta_2$, получим для разностной гармоники $U_3(X)$ при $(X+1) > (X+1)_p$ уравнение

$$\frac{\partial U_3}{\partial X} = \frac{\varepsilon M_0}{\alpha_3} \left(\frac{k l_0}{\varepsilon M_0}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sh}^2\left[\frac{(1 + BX) k l_0}{2\varepsilon M_0}\right]}, \quad (18)$$

$$U_3(X_p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega_3}{\omega_1}. \quad (19)$$

Значение $U_3(X_p)$ мы получили из (13).

Интегрируя (18) при условии (19), получим следующее выражение для амплитуды разностной гармоники при $(X+1) > (X+1)_p$:

$$U_3(X) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega_3}{\omega_1} + \left(\frac{k l_0}{\varepsilon M_0}\right) \frac{\alpha}{\alpha_3} \left[\mathrm{cth}\left(\frac{k l_0}{\varepsilon M_0}\right) - \mathrm{cth}\left(\frac{k l_0}{\alpha} X + \frac{k l_0}{2\varepsilon M_0}\right)\right]. \quad (20)$$

Переходя к размерным переменным, можно получить значение колебательной скорости для разностной гармоники:

$$v_3 \cong U_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a-1}{a+1}\right) \frac{\omega_3}{\omega_1} \exp\left\{\int_0^z \frac{dz}{2H}\right\} \sin \omega_3 \left(t - \frac{z}{c_0}\right), \quad (21)$$

где

$$a = \frac{X+1}{(X+1)_p}.$$

Для значений энергии разностной гармоники $E(\Theta_3, X)$ имеем

$$E(\Theta_3, X) = \frac{\rho_0 v_3^2}{2} = \frac{\bar{\rho}_0}{2} \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a-1}{a+1}\right)^2 U_0^2.$$

Учитывая, что $E(\Theta_{1,2}) = \bar{\rho}_0 U^2_0/2$, получим следующее выражение для коэффициента ζ преобразования энергии первичного излучения в разностное:

$$\zeta = \frac{E(\Theta_3, X)}{\sqrt{E(\Theta_1) E(\Theta_2)}} = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a-1}{a+1}\right)^2. \quad (22)$$

Зависимость ζ от расстояния до источника при $M_0=10^{-5}$ и $\lambda/H=10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2} (кривые *1*, *2*, *3*) показана на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что процесс преобразования энергии первичного излучения в разностное достигает насыщения, а амплитуда разностной гармоники стремится к некоторому постоянному значению, зависящему только от величины расстройки ω_3/ω_1. Например, при взаимодействии в атмосфере звуковых волн, порождаемых наземными источниками с частотами 42 и 38 Гц, энергия генерируемой разностной волны на частоте 4 Гц может составлять на высоте 80 км приблизительно 3% от энергии наземного излучения. В случае реальной атмосферы, когда $\nu\sim\nu_0(X+1)^2$, естественно ожидать более медленного нарастания с высотой величины ζ, чем в случае $\nu\sim\nu_0(X+1)$. Безразмерная ширина ударного фронта будет в этом случае определяться выражением $L'\sim L(X+1)$ (см. [5]). Можно показать, что при $(X+1)<(X+1)_{зат}$ отклонения в нелинейных искажениях для реальной атмосферы от случая, рассмотренного выше, незначительны. Подробно случай $\nu\sim\nu_0(X+1)^2$ рассмотрен в [6].

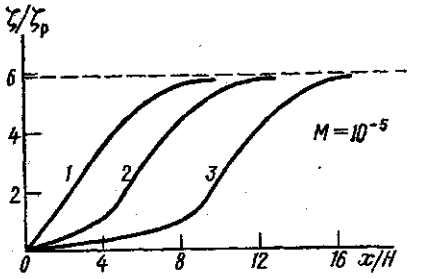

Рис. 1

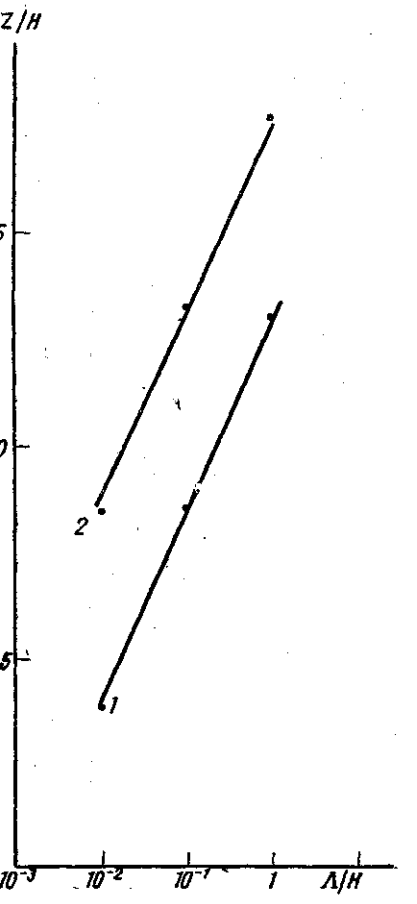

Рис. 2

Из (16) и (20) можно получить, что начиная с некоторого расстояния $(X+1)$ амплитуда разностного излучения будет больше амплитуды первичных волн, и становится возможным процесс обратной перекачки энергии от разностной гармоники к первичным. Имеем

$$(X+1)'_{п}\sim\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_3}}\,(X+1)_{п}\sim\frac{\omega_1}{\omega_3}(X+1)_{р}=\frac{\Lambda/H}{4\pi\varepsilon M_0}. \qquad (23)$$

На рис. 2 приведена зависимость $z/H=2\ln(X+1)'_{п}$ от Λ/H при $M=10^{-4}$ (*1*) и 10^{-5} (*2*); Λ — длина разностной волны.

Как уже отмечалось выше, выражение (20) для амплитуды разностной гармоники U_3 справедливо при условии $U_3<U_{1,2}$. В этом случае мы еще можем пользоваться решением Фея для первичных волн. При этом рассмотренные выше эффекты имеют энергетическую значимость в том случае, если они проявляются до расстояния затухания первичного из-

лучения из-за молекулярной диссипации $(X+1)_{зат}$ (см. [6]). Подставляя $(X+1)_{зат}$ в (17) и (20), получим условие применимости решения в режиме насыщения:

$$U_з < U_{1,2} \text{ или } M < \frac{\sqrt{\text{Кп}}}{2\varepsilon}\,\frac{\omega_1}{\omega_з}. \qquad (24)$$

Нелинейные эффекты заметно проявляются при выполнении

$$(X+1)_р < (X+1)_{зат} \text{ или } M > \frac{\sqrt{\text{Кп}}}{2\varepsilon}. \qquad (25)$$

Обозначим $\sqrt{\text{Кп}}/2\varepsilon$ через $M_{кр}$. При $\text{Кп}=8\cdot10^{-12}$ из (25) следует $M_{кр}=1{,}175\cdot10^{-6}$. Заметим, что критическое значение числа Маха определяется лишь значениями Кп и ε для атмосферы и не зависит от длины волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М. 1975. [2] Бахвалов К. С., Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Особенности работы мощных параметрических излучателей звука.— Акуст. журнал, 1978, 24, вып. 1, с. 125—127. [3] Новиков Б. К., Руденко О. В. Генерация низкочастотных гармоник в поле мощной амплитудно-модулированной волны. — Акуст. журнал, 1977, 23, вып. 5, с. 797—804. [4] Романова Н. Н. Вертикальное распространение акустических волн произвольной частоты в изотермической атмосфере. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1975, 11, вып. 3, с. 233—238. [5] Романова Н. Н. О вертикальном распространении коротких акустических волн в реальной атмосфере. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1970, 6, вып. 2, с. 134—145. [6] Куличков С. Н. Оценка нелинейных эффектов в акустических волнах, распространяющихся по наклонной траектории в атмосфере. — Препринт Ин-та физики атмосферы. М., 1979, 27 с.

Поступила в редакцию
19.03.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 535.338.334:533.9.01

УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ КАК ПРОБЛЕМА ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. Л. Климонтович, С. А. Сухин

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Задача об уширении спектральных линий в плазме привлекает внимание как экспериментаторов, так и теоретиков [1]. Обычно рассматривается либо штарковское уширение [2], либо уширение за счет неупругих переходов [3, 4].

В настоящей работе получено выражение для формы линии, учитывающее влияние обоих упомянутых факторов и поляризуемости плазмы, в рамках «кинетического» подхода, развитого в работе [5]. По духу этот подход близок так называемой «релаксационной» теории [1].

При таком подходе форма линии определяется временной зависимостью вектора поляризации поглощающих атомов, соответствующего переходу с вырожденного уровня b на вырожденный уровень a. Вектор поляризации выражается через недиагональные элементы матрицы плотности атомной подсистемы. Уравнение для матрицы плотности находится методами кинетической теории плазмы. Тем самым кинетическая теория формы спектральных линий формулируется как одно из