лучения из-за молекулярной диссипации $(X+1)_{\text{зат}}$ (см. [6]). Подставляя $(X+1)_{\text{зат}}$ в (17) и (20), получим условие применимости решения в режиме насыщения:

$$U_3 < U_{1,2} \text{ или } M < \frac{\sqrt{\text{Kn}}}{2\varepsilon} \frac{\omega_1}{\omega_3}. \qquad (24)$$

Нелинейные эффекты заметно проявляются при выполнении

$$(X+1)_{\text{р}} < (X+1)_{\text{зат}} \text{ или } M > \frac{\sqrt{\text{Kn}}}{2\varepsilon}. \qquad (25)$$

Обозначим $\sqrt{\text{Kn}}/2\varepsilon$ через $M_{\text{кр}}$. При $\text{Kn}=8\cdot 10^{-12}$ из (25) следует $M_{\text{кр}}=1{,}175\cdot 10^{-6}$. Заметим, что критическое значение числа Маха определяется лишь значениями Kn и ε для атмосферы и не зависит от длины волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М. 1975. [2] Бахвалов К. С., Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Особенности работы мощных параметрических излучателей звука.— Акуст. журнал, 1978, **24**, вып. 1, с. 125—127. [3] Новиков Б. К., Руденко О. В. Генерация низкочастотных гармоник в поле мощной амплитудно-модулированной волны. — Акуст. журнал, 1977, 23, вып. 5, с. 797—804. [4] Романова Н. Н. Вертикальное распространение акустических волн произвольной частоты в изотермической атмосфере. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1975, 11, вып. 3, с. 233—238. [5] Романова Н. Н. О вертикальном распространении коротких акустических волн в реальной атмосфере. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1970, **6**, вып. 2, с. 134—145. [6] Куличков С. Н. Оценка нелинейных эффектов в акустических волнах, распространяющихся по наклонной траектории в атмосфере. — Препринт Ин-та физики атмосферы. М., 1979, 27 с.

Поступила в редакцию
19.03.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 535.338.334:533.9.01

УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ КАК ПРОБЛЕМА ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. Л. Климонтович, С. А. Сухин

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Задача об уширении спектральных линий в плазме привлекает внимание как экспериментаторов, так и теоретиков [1]. Обычно рассматривается либо штарковское уширение [2], либо уширение за счет неупругих переходов [3, 4].

В настоящей работе получено выражение для формы линии, учитывающее влияние обоих упомянутых факторов и поляризуемости плазмы, в рамках «кинетического» подхода, развитого в работе [5]. По духу этот подход близок так называемой «релаксационной» теории [1].

При таком подходе форма линии определяется временной зависимостью вектора поляризации поглощающих атомов, соответствующего переходу с вырожденного уровня b на вырожденный уровень a. Вектор поляризации выражается через недиагональные элементы матрицы плотности атомной подсистемы. Уравнение для матрицы плотности находится методами кинетической теории плазмы. Тем самым кинетическая теория формы спектральных линий формулируется как одно из направлений общей теории флуктуаций в неравновесной плазме. Аналогичным образом решается задача об уширении спектральных линий лазерного излучения [6]. Как показано ниже, форма линии зависит от спектральных плотностей флуктуаций продольного и поперечного полей $(\delta \mathbf{E}\, \delta \mathbf{E})^{\parallel}_{\omega,\mathbf{k}}$, $(\delta \mathbf{E}\, \delta \mathbf{E})^{\perp}_{\omega,\mathbf{k}}$, определяемых различными процессами [7]. Тем самым учитывается их влияние на форму линий. Приводимые результаты носят довольно общий характер, и для применения их к конкретным линиям требуются численные методы, на чем мы не останавливаемся.

Постановка задачи. Будем рассматривать пространственно-однородную плазму. Пусть концентрация заряженных частиц намного больше концентрации атомов: $n_e \gg n_{ei}$. Тогда уширением за счет собственного давления можно пренебречь. Далее, поскольку учет доплеровского уширения не представляет трудностей, то без ограничения общности атомы можно считать неподвижными.

Вектор поляризации, соответствующий переходу $a \to b$, следующим образом выражается через матрицу плотности $f_{\alpha\beta}(t)$:

$$\mathbf{P}_{ab}(t) = n_{ei} \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{d}_{\beta\alpha} f_{\alpha\beta} + \mathbf{d}_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}). \tag{1}$$

Здесь α и β обозначают совокупность параболических квантовых чисел уровней a и b соответственно.

Чтобы вывести уравнение для функции $f_{\alpha\beta}(t)$, используем в качестве исходной систему уравнений для операторной матрицы плотности $N_{\nu\mu}(\mathbf{R}, t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\mathscr{H}_{0\nu\nu} - \mathscr{H}_{0\mu\mu})\right] N_{\nu\mu}(\mathbf{R}, t) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{\nu_1} [\mathbf{d}_{\nu\nu_1} N_{\nu_1\mu}(\mathbf{R}, t) - N_{\nu\nu_1}(\mathbf{R}, t)\, \mathbf{d}_{\nu_1\mu}]\, \mathbf{E}^M(\mathbf{R}, t), \tag{2}$$

$$\mathbf{E}^M = \mathbf{E}^{\perp} + \mathbf{E}_e^{\parallel}.$$

Величины $\mathscr{H}_{0\nu\nu}$ означают $E_\nu + eFz_{\nu\nu}$, F — напряженность ионного микрополя. Суммирование в (2) проводится по всем состояниям, соответствующим спектру собственных значений гамильтониана изолированного атома.

Обозначим символом $\langle ... \rangle_{\mathrm{hf}}$ усреднение по ансамблю при заданном микрополе ионов; усреднение по распределению ионного микрополя будем обозначать символом $\{...\}_F$.

По определению,

$$\langle N_{\nu\mu}(\mathbf{R}, t)\rangle_{\mathrm{hf}} = n_{ei} f_{\nu\mu}(F, t), \quad f_{\nu\mu}(t) = \{f_{\nu\mu}(F, t)\}_F. \tag{3}$$

Усредняя (2), получим уравнение для $f_{\alpha\beta}(F, t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\mathscr{H}_{0\alpha\alpha} - \mathscr{H}_{0\beta\beta})\right] f_{\alpha\beta}(F, t) = I_{\alpha\beta}(F, t), \tag{4}$$

где

$$I_{\alpha\beta}(F, t) = \frac{i}{n_{ei}\hbar} \sum_{\nu} [\mathbf{d}_{\alpha\nu} \langle \delta N_{\nu\mu}\, \delta \mathbf{E}\rangle_{\mathrm{hf}} - \langle \delta N_{\alpha\nu}\, \delta \mathbf{E}\rangle_{\mathrm{hf}}\, \mathbf{d}_{\nu\mu}]. \tag{5}$$

Из соотношений (1), (3)—(5) можно найти профиль линии.

Интеграл столкновений. Диссипативная матрица. Метод вывода выражения для интеграла столкновений изложен в работе [5], и мы его здесь опускаем. Отметим лишь упрощения, использованные при вычислениях.

1. Зависимость спектральной плотности флуктуаций поля от напряженности ионного микрополя не учитывается.

2. Быстрые изменения интеграла столкновений определяются как быстрыми изменениями функций распределения $f_{\mu\nu}$, так и быстрыми компонентами спектральной плотности флуктуаций поля. Последние не влияют непосредственно на уширение спектральных линий и поэтому здесь не учитываются.

3. В выражении для интеграла столкновений сохраняются лишь «резонансные» члены, т. е. вклады, пропорциональные $\exp(-i\omega_{ab}t)$, ω_{ab} — частота перехода изолированного атома.

Решение кинетического уравнения (4) ищем в виде разложения Фурье для функций времени. Введем диссипативную матрицу, которую представим в виде суммы $\Phi_{ab}+\Gamma_a+\Gamma^*_b$. С ее помощью запишем:

$$I_{ab}(F, \omega) = -[\Phi_{ab}(F, \omega) + \Gamma_a(F) + \Gamma^*_b(F)] f_{ab}(F, \omega). \tag{6}$$

Правая часть этого выражения определяется следующим образом:

$$\Phi_{ab}(F, \omega) = \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\tau\, e^{(i\omega-\Delta)\tau} \left\{ (\mathbf{d}_a)_i \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{ab}\tau\right) [(\mathbf{d}_a)_j - \right.$$

$$\left. -(\mathbf{d}^*_b)_j] - \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{ab}\tau\right) [(\mathbf{d}_a)_j (\mathbf{d}^*_b)_i - (\mathbf{d}^*_b)_i (\mathbf{d}^*_b)_j] \right\} (\delta E_j\, \delta E_i)_{\mathbf{k}, -\tau}. \tag{7}$$

Здесь

$$((\mathbf{d}_a)_i f_{ab})_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'} (\mathbf{d}_{\alpha\alpha'})_i f_{\alpha'\beta},$$

$$((\mathbf{d}^*_b)_j f_{ab})_{\alpha\beta} = \sum_{\beta'} f_{\alpha\beta'} (\mathbf{d}_{\beta'\beta})_j,$$

$$\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_{0a} - \mathcal{H}_{0b}.$$

$\mathcal{H}_{0a}$, $\mathcal{H}_{0b}$ имеют только диагональные матричные элементы, равные соответственно величинам $\mathcal{H}_{0\alpha\alpha}$, $\mathcal{H}_{0\beta\beta}$.

Остальные слагаемые, входящие в выражение (6), имеют следующие матричные элементы:

$$[(\Gamma_a + \Gamma^*_b) f_{ab}]_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'} \Gamma_{\alpha\alpha'} f_{\alpha'\beta} + \sum_{\beta'} f_{\alpha\beta'} \Gamma_{\beta'\beta},$$

где

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(F) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\nu \notin a} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4} (\mathbf{d}_{\alpha\nu})_i \times$$

$$\times \left[i\left(\omega - \omega_{ab} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{H}_{\nu\beta}\right) + \Delta \right]^{-1} (\mathbf{d}_{\nu\alpha'})_j (\delta E_j\, \delta E_i)_{\omega,\mathbf{k}}, \tag{8}$$

а выражение для $\Gamma_{\beta'\beta}(F)$ получается отсюда заменой α, α', $\mathcal{H}_{\nu\beta}$ на β', β, $\mathcal{H}_{\alpha\nu}$ соответственно.

Входящая в выражение (8) спектральная плотность флуктуаций поля слагается из продольной и поперечной частей:

$$(\delta E_j\, \delta E_i)_{\omega,\mathbf{k}} = (\delta E_j\, \delta E_i)^{\perp}_{\omega,\mathbf{k}} + (\delta E_j\, \delta E_i)^{\parallel}_{\omega,\mathbf{k}}.$$

Посредством $(\delta E_j\,\delta E_i)^{\parallel}_{\omega,\mathbf{k}}$ учитывается столкновительная релаксация штарковских подуровней, с помощью же величины $(\delta E_j\,\delta E_i)^{\perp}_{\omega,\mathbf{k}}$ можно учесть, например, радиационное затухание. Отметим, что $\operatorname{Re}\Gamma_{\alpha\alpha}$, $\operatorname{Re}\Gamma_{\beta\beta}$ имеют смысл обратных времен жизни компонент α и β, определяемых неупругими процессами, а $\operatorname{Im}\Gamma_{\alpha\alpha}$, $\operatorname{Im}\Gamma_{\beta\beta}$ имеют смысл соответствующих сдвигов частот переходов.

Профиль линии с учетом неупругих процессов. На основании формул (1), (4), (6) профиль линии дается выражением:

$$L(\omega) = \operatorname{Sp}\left(\left[\frac{i}{\hbar}\,\mathcal{H}_{ab} - i\,\omega + \Phi_{ab} + \Gamma_a + \Gamma_b^*\right]^{-1} \mathbf{d}_{ab}\,\mathbf{d}_{ba}\right).$$

Перепишем это выражение в обычно используемых обозначениях [2, с. 468]:

$$L(\omega) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \langle\alpha'\,|(\mathbf{d}_{ab})_i|\,\beta'\rangle\,\langle\beta\,|(\mathbf{d}_{ba})_i|\,\alpha\rangle\,\times\right.$$
$$\left.\times\left\langle\left\langle\alpha\beta\left|\left[\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}_{0a} - \mathcal{H}_{0b}) - i\,\omega + \Phi_{ab} + \Gamma_a + \Gamma_b^*\right]^{-1}\right|\alpha'\beta'\right\rangle\right\rangle\right\}_{\mathrm{F}}. \qquad (9)$$

В качестве примеров далее мы рассмотрим радиационное уширение спектральных линий и уширение электронной компонентой. Первое из них обусловлено взаимодействием атомного осциллятора с осцилляторами электромагнитного поля. Это взаимодействие можно учесть, выбирая спектральную плотность флуктуаций поля в виде [8, с. 208]:

$$(\delta E_j\,\delta E_i)^{\perp}_{\omega,\mathbf{k}} = \frac{8\pi^2}{3}\,c\hbar k\,\delta(\omega - ck)\,\delta_{ij}.$$

Теперь, используя формулу (8) и пренебрегая перенормированным сдвигом, получаем:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(F) = \frac{2}{3\hbar c^3}\sum_{\nu\notin a} \mathbf{d}_{\alpha\nu}\,\mathbf{d}_{\nu\alpha'}\left(\omega_{ab} - \frac{1}{\hbar}\mathcal{H}_{\nu\beta}\right)^3\Theta\left(\omega_{ab} - \frac{1}{\hbar}\mathcal{H}_{\nu\beta}\right),$$

где $\Theta(x) = 1$, если $x \geqslant 0$, и $\Theta(x) = 0$, если $x < 0$. Для линии $\mathrm{Ly} = \alpha$ отсюда получается простой результат:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} = \frac{2\omega_{ab}^3}{3\hbar c^3}\,\mathbf{d}_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}_{\beta\alpha'}.$$

Перейдем к рассмотрению столкновений электронов с атомами. При расчетах мы будем пренебрегать зависимостью Φ_{ab}, Γ_a, Γ_b от F. Тогда входящие в формулы (7)—(9) величины $\mathcal{H}_{ab}$, $\mathcal{H}_{\nu\beta}$ и т. п. можно заменить на ω_{ab}, $\omega_{\nu\beta} = (E_\nu - E_\beta)/\hbar$ и т. п. Для спектральной плотности флуктуаций поля используем выражение [9, с. 171]:

$$(\delta E_j\,\delta E_i)_{\omega,\mathbf{k}} = \frac{\delta_{ij}}{3}\,(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega,\mathbf{k}} = \frac{\delta_{ij}\,(4\pi)^3 e^2 n_e}{2k^2}\int\frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{p}/m_e)\,f_e(\mathbf{p})\,d\,\mathbf{p}}{|\,\varepsilon(\omega,\mathbf{k})\,|^2}. \qquad (10)$$

Выполнить интегрирование по k в формулах (7)—(8) в общем случае не удается из-за сложности входящей туда функции $|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^{-2}$. Введем поэтому дополнительные предположения.

1. Распределение свободных заряженных частиц по импульсам описывается равновесным распределением.

2. Функция $|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^{-2}$, учитывающая в $(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\omega,\mathbf{k}}$ поляризацию среды, заменяется усредненным по ω значением. Это соответствует введению при расчете корреляций эффективного потенциала взаимодействия между заряженными частицами (см. § 47, 55 в [9]). При условиях *1*, *2* из формул (10) и (8) получаем:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} = \frac{(4\pi)^3 e^2 n_e m_e}{6\,(2\pi\, m_e \kappa T_e)^{1/2}} \sum_{\nu \notin a} \int \frac{d\,\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4}\, \frac{\mathbf{d}_{\alpha\nu}\,\mathbf{d}_{\nu\alpha'}}{i\,(\omega - \omega_{\alpha\nu}) + \Delta} \times$$

$$\times\, k^{-3}\,[1 + (r_{\mathrm{D}}\, k)^{-2}]^{-1} \exp\left(-\frac{m_e\,\omega^2}{2\kappa T_e k^2}\right). \qquad (11)$$

Подынтегральное выражение в (11) можно приближенно заменить на $\frac{4\pi}{k}$, но ограничить область интегрирования так, что

$$r_{\max}^{-1} < k < r_{\mathrm{B}}^{-1}, \quad r_{\max} = \min\left(r_{\mathrm{D}},\ \sqrt{\kappa\, T_e/m_e\,\omega_{\alpha\nu}^2}\right),$$

r_{B} — радиус Вайскопфа (определяется из условия применимости теории возмущений). Наконец, считаем, что $\hbar\omega_{\alpha\nu}/\kappa T_e < 1$. В результате получаем следующие выражения для действительной и мнимой частей $\Gamma_{\alpha\alpha'}$:

$$\operatorname{Re}\Gamma_{\alpha\alpha'} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \sum_{\nu \notin a} \mathbf{d}_{\alpha\nu}\,\mathbf{d}_{\nu\alpha'}\, \frac{e^2 n_e\, m_e^{1/2}}{\hbar^2\,(\kappa T_e)^{1/2}} \ln\frac{r_{\max}}{r_{\mathrm{B}}}, \qquad (12)$$

$$\operatorname{Im}\Gamma_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}\Gamma_{\alpha\alpha'}.$$

Выражения для $\operatorname{Re}\Gamma_{\beta'\beta}$, $\operatorname{Im}\Gamma_{\beta\beta'}$ аналогичны.

Рассмотрим теперь штарковское уширение. Пренебрегая влиянием ионного микрополя, перепишем (7) в более простом виде:

$$\Phi_{ab}(\Delta\,\omega_{ab}) = \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b^*)^2}{3\hbar^2} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega'}{(2\pi)^4}\, \frac{(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega',\mathbf{k}}}{i\,(\omega' - \Delta\omega_{ab}) + \Delta},$$

$$\Delta\,\omega_{ab} = \omega - \omega_{ab}. \qquad (13)$$

Сравнивая это выражение с выражением (8), видим, что, в отличие от уширения за счет неупругих переходов, штарковское уширение определяется поведением спектральной плотности флуктуаций поля на низких частотах. В частности, в ударной области ($\Delta\omega_{ab} = 0$)

$$\Phi_{ab}(0) = \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b^*)^2}{6\hbar^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi^3)}\, (\delta\,\mathbf{E}\,\delta\,\mathbf{E})_{0,\mathbf{k}}.$$

Подставляя сюда выражение (10), аналогично выводу (12) найдем оператор ширины и сдвига:

$$\Phi_{ab}(0) = \frac{8\pi\, e^2\, n_e m_e}{3\,(2\,\pi m_e \kappa T_e)^{1/2}}\, (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b^*)^2 \ln\frac{r_{\mathrm{D}}}{r_{\mathrm{B}}}, \qquad (14)$$

что совпадает с результатом, приведенным в работе [2]. Как следует из выражений (13) и (10), при отличных от нуля расстройках появляется новый параметр обрезания, равный $v_0/\Delta\omega_{ab}$ ($v_0 = \sqrt{2\kappa T_e/m_e}$), который есть не что иное, как параметр Льюиса.

Сравним вклады в полную ширину линии от различных механизмов по порядку величины. Оценки проведем на примере водорода. В оптическом диапазоне частот ($\omega_{ab}=2\cdot10^{15}c^{-1}$), при $T_e=4\cdot10^4$K и $n_e=10^{14}$ см$^{-3}$ справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}(\Gamma_{\alpha\alpha'})_{\text{рад}} \ll \mathrm{Re}(\Gamma_{\alpha\alpha'})_{\text{неупр}} \ll \mathrm{Re}\,\Phi_{\alpha\beta},$$

причем отношение ширин составляет примерно два порядка. Таким образом, при указанных условиях механизм штарковского уширения является преобладающим.

В заключение хотелось бы отметить следующее. Кинетический подход позволяет рассчитать форму линий и в неравновесной плазме. Для этого надо использовать систему уравнений для недиагональных и диагональных элементов матрицы плотности, причем интегралы столкновений в уравнениях следует выбирать достаточно простым образом. Таким путем можно учесть и влияние турбулентных возмущений на форму линии. В рамках релаксационной теории уширение спектральных линий в слабо турбулентной плазме рассматривалось в работе [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. М., 1978, 492 с. [2] Лисица В. С. Штарковское уширение линий водорода в плазме. — Успехи физ. наук, 1977, **122**, вып. 3, с. 449—495. [3] Асмарян Э. А., Климонтович Ю. Л. Уширение спектральных линий электронами в неравновесной частично ионизованной плазме. — Оптика и спектроскопия, 1971, **31**, вып. 1, с. 30—36. [4] Асмарян Э. А., Климонтович Ю. Л. К теории уширения спектральных линий в неравновесной частично ионизованной плазме. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, **15**, № 3, с. 273—281. [5] Климонтович Ю. Л. Вопросы статистической теории взаимодействия атомов с излучением. — Успехи физ. наук, 1970, **101**, вып. 4, с. 577—605. [6] Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. Под редакцией Ю. Л. Климонтовича. М., 1974, 416 с. [7] Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неупругих процессов в плазме. I. Кинетические уравнения для кулоновской плазмы с учетом неупругих процессов. — ЖЭТФ, 1967, **52**, вып. 5, с. 1233—1245; II. Процессы, обусловленные поперечным электромагнитным полем. — ЖЭТФ, 1968, **54**, вып. 1, с. 136—147. [8] Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров. М., 1977, 320 с. [9] Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., 1975, 352 с. [10] Capes H., Voslamber D. Spectral-line profiles in weakly turbulent plasmas. — Phys. Rev. A, 1977, **15A**, N 4, p. 1751—1766.

Поступила в редакцию
03.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 681.5.037.2

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ ПО ФОРМУЛАМ СВОБОДНОГО ПАРАМЕТРА АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

Построение траекторий корней характеристического уравнения

$$\Phi_n(p)+K\Psi_m(p)=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)+K(b_0p^m+b_1p^{m-1}+ +\ldots+b_m)=0, \tag{1}$$

где K — свободный параметр ($n\geqslant m$), полностью решает вопрос об устойчивости линейных динамических систем [1].

При заданных начальных и предельных точках траекторий корней исследование устойчивости возможно без построения траекторий корней, а с использованием общих свойств корневых годографов [2].