ческом диапазоне частот ($\omega_{ab}=2\cdot10^{15}$с$^{-1}$), при $T_e=4\cdot10^4$К и $n_e=10^{14}$ см$^{-3}$ справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\Gamma_{\alpha\alpha'})_{\text{рад}} \ll \mathrm{Re}\,(\Gamma_{\alpha\alpha'})_{\text{неупр}} \ll \mathrm{Re}\,\Phi_{\alpha\beta},$$

причем отношение ширин составляет примерно два порядка. Таким образом, при указанных условиях механизм штарковского уширения является преобладающим.

В заключение хотелось бы отметить следующее. Кинетический подход позволяет рассчитать форму линий и в неравновесной плазме. Для этого надо использовать систему уравнений для недиагональных и диагональных элементов матрицы плотности, причем интегралы столкновений в уравнениях следует выбирать достаточно простым образом. Таким путем можно учесть и влияние турбулентных возмущений на форму линии. В рамках релаксационной теории уширение спектральных линий в слабо турбулентной плазме рассматривалось в работе [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. М., 1978, 492 с. [2] Лисица В. С. Штарковское уширение линий водорода в плазме. — Успехи физ. наук, 1977, 122, вып. 3, с. 449—495. [3] Асмарян Э. А., Климонтович Ю. Л. Уширение спектральных линий электронами в неравновесной частично ионизованной плазме. — Оптика и спектроскопия, 1971, 31, вып. 1, с. 30—36. [4] Асмарян Э. А., Климонтович Ю. Л. К теории уширения спектральных линий в неравновесной частично ионизованной плазме. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, 15, № 3, с. 273—281. [5] Климонтович Ю. Л. Вопросы статистической теории взаимодействия атомов с излучением. — Успехи физ. наук, 1970, 101, вып. 4, с. 577—605. [6] Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. Под редакцией Ю. Л. Климонтовича. М., 1974, 416 с. [7] Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неупругих процессов в плазме. I. Кинетические уравнения для кулоновской плазмы с учетом неупругих процессов. — ЖЭТФ, 1967, 52, вып. 5, с. 1233—1245; II. Процессы, обусловленные поперечным электромагнитным полем. — ЖЭТФ, 1968, 54, вып. 1, с. 136—147. [8] Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров. М., 1977, 320 с. [9] Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., 1975, 352 с. [10] Capes H., Voslamber D. Spectral-line profiles in weakly turbulent plasmas. — Phys. Rev. A, 1977, 15A, N 4, p. 1751—1766.

Поступила в редакцию
03.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 681.5.037.2

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ ПО ФОРМУЛАМ СВОБОДНОГО ПАРАМЕТРА АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

Построение траекторий корней характеристического уравнения

$$\Phi_n(p)+K\Psi_m(p)=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)+K(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m)=0, \qquad (1)$$

где K — свободный параметр ($n\geqslant m$), полностью решает вопрос об устойчивости линейных динамических систем [1].

При заданных начальных и предельных точках траекторий корней исследование устойчивости возможно без построения траекторий корней, а с использованием общих свойств корневых годографов [2].

В работе рассмотрен простой графический метод определения областей устойчивости систем, описываемых характеристическим уравнением (1), основанный на построении кривых свободного параметра [3] на плоскости $[\omega^2, K(\delta, \omega^2)]$ для $\delta=0$. Рассматриваемый метод, в отличие от частотных методов [4], основанных на построении параметрических кривых $u(\omega)$ и $v(\omega)$ на комплексной плоскости (u, v), использует более простые графики в функции квадрата частоты на действительной плоскости (ω^2, K). Он удобен для исследования устойчивости систем высокого порядка, а также многоконтурных систем.

В аналогичном виде метод был предложен в работе [5], однако он не был связан с аналитическим методом траекторий корней и недостаточно полно обсужден.

1. **Определение областей устойчивости систем класса [n; m] на плоскости (ω^2, K).** Подставляя в (1) $p=\delta+j\omega$ и разделяя действительные и мнимые части, получим:

$$[\Phi_r(\delta, \omega^2) + K\Psi_r(\delta, \omega^2)] + j\omega[\Phi_j(\delta, \omega^2) + K\Psi_j(\delta, \omega^2)] = 0, \qquad (2)$$

где согласно [1]

$$\Phi_2(\delta, \omega^2) = \Phi_n^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Phi_n^{(2)}(\delta) + \dots,$$

$$\Psi_r(\delta, \omega^2) = \Psi_m^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Psi_m^{(2)}(\delta) + \dots,$$

$$\Phi_j(\delta, \omega^2) = \Phi_n^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Phi_n^{(3)}(\delta) + \dots,$$

$$\Psi_j(\delta, \omega^2) = \Psi_m^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Psi_m^{(3)}(\delta) + \dots.$$

Здесь в верхних скобках указан порядок производной по δ.

Формулы свободного параметра для $\omega\neq 0$ имеют вид:

$$-K_r = \frac{\Phi_r(\delta, \omega^2)}{\Psi_r(\delta, \omega^2)} = \frac{\Phi_n^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Phi_n^{(2)}(\delta) + \dots}{\Psi_m^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Psi_m^{(2)}(\delta) + \dots}, \qquad (3)$$

$$-K_j = \frac{\Phi_j(\delta, \omega^2)}{\Psi_j(\delta, \omega^2)} = \frac{\Phi_n^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Phi_n^{(3)}(\delta) + \dots}{\Psi_m^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Psi_m^{(3)}(\delta) + \dots}, \qquad (4)$$

причем $K_r = K_j = K$, а для $\omega = 0$

$$-K = \frac{\Phi_n(\delta)}{\Psi_m(\delta)} = \frac{a_0\delta^n + a_1\delta^{n-1} + \dots + a_n}{b_0\delta^m + b_1\delta^{m-1} + \dots + b_m}. \qquad (5)$$

По формулам (3) и (4) можно графически построить корневой годограф. Для этого [3] при фиксированных значениях $\delta=\delta_0$ на плоскости (ω^2, K) строятся кривые K_r и K_j. По их пересечению определяются значения ω, соответствующие равенству $K_r=K_j$. Значения свободного параметра на действительной оси, как видно из сравнения (3) и (5), находятся из пересечения кривой K_r с осью K.

Для исследования устойчивости положим в формулах (3) и (4) $\delta=0$ и запишем их через коэффициенты полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$:

$$-K_r = \frac{\Phi_r}{\Psi_r} = \frac{a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \dots}{b_m - \omega^2 b_{m-2} + \omega^4 b_{m-4} - \dots}, \qquad (6)$$

$$-K_j = \frac{\Phi_j}{\Psi_j} = \frac{a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \dots}{b_{m-1} - \omega^2 b_{m-3} + \omega^4 b_{m-5} - \dots} \qquad (7)$$

или

$$\Phi_r + K_r\Psi_r = (a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \dots) + \\ + K_r(b_m - \omega^2 b_{m-2} + \omega^4 b_{m-4} - \dots) = 0, \qquad (6а)$$

$$\Phi_j + K_j\Psi_j = (a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \dots) + \\ + K_j(b_{m-1} - \omega^2 b_{m-3} + \omega^4 b_{m-5} - \dots) = 0. \qquad (7а)$$

Тогда из пересечения кривых K_r и K_j при $\delta=0$, построенных на плоскости (ω^2, K), можно определить возможные критические частоты $\omega_к$ и критические значения свободного параметра $K_к$.

Выделим области значений K на плоскости (ω^2, K), при которых характеристическое уравнение (1) описывает континуум устойчивых систем. Подставляя в (1) $p=j\omega$ и фиксируя $K=K_0$, получим формулы характеристической кривой Михайлова [4]:

$$u(\omega) = (a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \dots) + K_0(b_m - \omega^2 b_{m-2} + \omega^4 b_{m-4} - \dots)$$

и

$$v(\omega) = \omega[(a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \dots) + \\ + K_0(b_{m-1} - \omega^2 b_{m-3} + \omega^4 b_{m-5} - \dots)].$$

Легко видеть, что для систем, устойчивых при некоторой $K=K_0$, должно выполняться следствие из критерия Михайлова, согласно которому при возрастании ω от 0 до $+\infty$ $(0<\omega<+\infty)$ функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ последовательно обращаются в нуль $n-1$ раз. Отсюда следует, что для устойчивых систем прямая $K=K_0$ на плоскости (ω^2, K) должна последовательно пересекать сначала кривую K_r, затем кривую K_j и т. д. $n-1$ раз.

Для устойчивых систем всегда выполняется условие Вышнеградского, которое для уравнения (1) имеет вид:

$$a_0>0,\ a_1>0,\ \dots,\ a_{n-m-1}>0,\ a_{n-m}+Kb_0>0,\ \dots,\ a_n+Kb_m>0. \qquad (8)$$

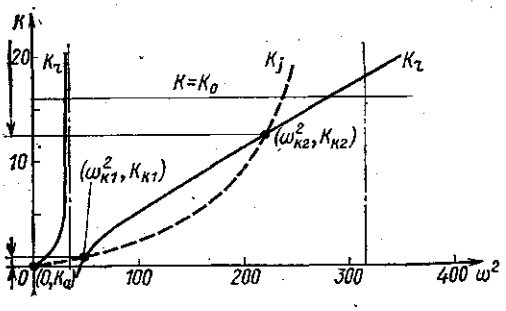

Рис. 1

Оно накладывает ограничения на величину K в зависимости от значений коэффициентов a_i и b_j. Этими соотношениями будем пользоваться при графическом определении областей устойчивости. Если $a_n+Kb_m=0$, то $K=-a_n/b_m=K_a$ и система находится на границе апериодической устойчивости. Это следует из формулы (5) при $\delta=0$. На плоскости (ω^2, K) пересечение кривой K_r и оси K происходит в точке $(0, K_a)$. В области K, где (8) не выполняется, для уменьшения объема вычислений кривые K_r и K_j можно не строить.

Поясним сказанное примером. Найдем области устойчивости системы [6], характеристическое уравнение которой:

$$(p^4+5{,}25p^3+43p^2)+K(p^3+17{,}01p^2+316{,}224p+588)=0. \qquad (9)$$

Подставляя численные значения коэффициентов уравнения (9) в (6) и (7), получим формулы кривых

$$K_r = \frac{43\omega^2 - \omega^4}{588 - 17{,}01\omega^2} \text{ и } K_j = \frac{5{,}25\omega^2}{316{,}224 - \omega^2},$$

графики которых в функции квадрата частоты построены на рис. 1 при $K>0$, где выполняется условие (8). Сплошными линиями изображены кривая K_r, состоящая из двух ветвей, прерывистой — верхняя ветвь кривой K_j (нижняя ветвь расположена в области отрицательных значений K и поэтому не построена) и штрих-пунктирными линиями — вертикальные асимптоты кривых K_r и K_j. Система устойчива в областях $0<K<0{,}9$

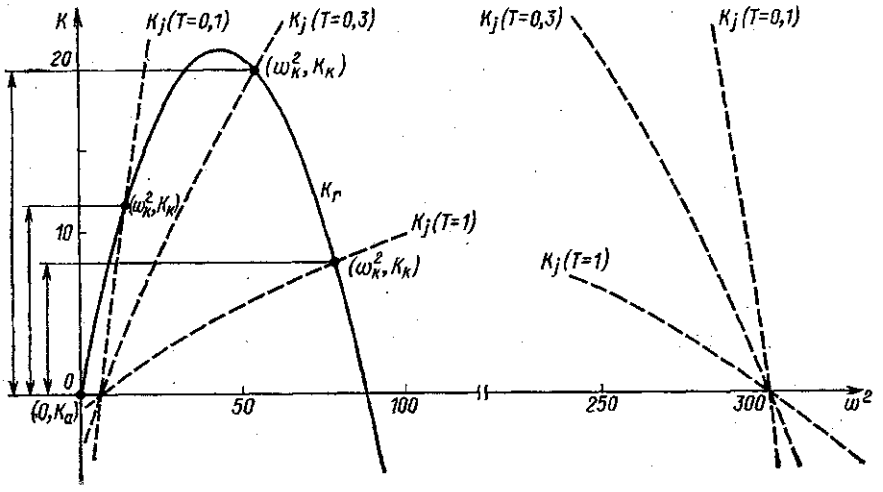

Рис. 2

и $12{,}5<K<+\infty$, обозначенных на рисунке стрелками, так как здесь любая прямая $K=K_0$ последовательно пересекает кривые K_r и K_j три раза. При $K_a=0$ система находится на границе апериодической устойчивости, а при $K_{к1}=0{,}9$ и $K_{к2}=12{,}5$ — на границе колебательной устойчивости с критическими частотами $\omega_{к1}=\sqrt{47}\simeq 6{,}9$ и $\omega_{к2}=\sqrt{222}\simeq 14{,}9$.

Предложенный метод позволяет также исследовать влияние параметров семейства траекторий корней на области устойчивости по свободному параметру. В качестве иллюстрации рассмотрим систему, описываемую характеристическим уравнением [7]:

$$p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3T_4p^2+T_3p+1)+K(Tp+1)=0, \qquad (10)$$

где $T_1=0{,}12$ с, $T_2=0{,}77$ с, $T_3=0{,}064$ с, $T_4=0{,}085$ с, T — параметр семейства траекторий корней, K — свободный параметр.

Подставляя в (10) численные значения, получим

$$(0{,}000503\,p^5+0{,}0108\,p^4+0{,}155\,p^3+0{,}954\,p^2+p)+K(Tp+1)=0,$$

откуда, используя (6) и (7), приходим к формулам кривых

$$K_r = 0{,}954\omega^2 - 0{,}0108\omega^4 \text{ и } K_j = \frac{-1+0{,}155\omega^2-0{,}000503\omega^4}{T}.$$

На рис. 2 построены кривая K_r и семейство кривых K_j при $T=0{,}1$ с; $0{,}3$ с и 1 с, откуда находим, что система устойчива в области $0=K_a<K<K_к$. Видно, что с увеличением T критическое значение свободного

параметра сначала увеличивается, а затем, достигнув максимума, уменьшается.

2. **Определение областей устойчивости систем класса** [n; 0]. Для частного случая $\Psi_m(p)=1$ характеристическое уравнение (1) принимает вид:

$$\Phi_n(p)+K=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)+K=0. \qquad (11)$$

Подставляя в формулы (6а) и (7а) $m=0$ и $b_0=1$, получим

$$-K_r=a_n-\omega^2a_{n-2}+\omega^4a_{n-4}-\ldots, \qquad (12)$$

$$\Phi_j=a_{n-1}-\omega^2a_{n-3}+\omega^4a_{n-5}-\ldots=0, \qquad (13)$$

где последнее уравнение является уравнением возможных критических частот и соответствует кривой K_j. Оно имеет более низкий порядок, чем (11). Кривые K_j на плоскости (ω^2, K) принимают вид вертикальных прямых $\omega^2=\omega^2_к$, где $\omega^2_к$ — положительные действительные корни (13).

Соотношения (8) упрощаются и могут быть записаны:

$$a_0>0,\ a_1>0,\ \ldots,\ a_{n-1}>0,\ K>-a_n. \qquad (14)$$

Найдем в качестве примера области устойчивости системы [7], характеристическое уравнение которой

$$p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)(T_4T_5p^2+T_4p+1)+K=0, \qquad (15)$$

где $T_1=0{,}005$ с, $T_2=0{,}12$ с, $T_3=0{,}77$ с, $T_4=0{,}064$ с, $T_5=0{,}085$с.

Подставляя в (15) численные значения и раскрывая скобки, получим $(0{,}00000251\,p^6+0{,}000556\,p^5+0{,}0115\,p^4+0{,}16\,p^3+0{,}959\,p^2+p)+K=0$, откуда согласно (12) и (13)

$$K_r=0{,}959\,\omega^2-0{,}0115\,\omega^4+0{,}00000251\,\omega^6,$$

$$\Phi_j=1-0{,}16\,\omega^2+0{,}000556\,\omega^4=0.$$

Из последнего уравнения находим возможные критические частоты $\omega_{к1}=\sqrt{6{,}4}\simeq 2{,}5$ и $\omega_{к2}=\sqrt{280{,}4}\simeq 16{,}7$. В силу (14) при $K<0$ система неустойчива, поэтому здесь кривую K_r можно не строить. Как видно из рис. 3, система устойчива в области $0<K<5{,}7$. При $K_a=0$ система находится на границе апериодической устойчивости, а при $K_{к1}=5{,}7$ — на границе колебательной устойчивости. Поэтому критической частотой является только $\omega_{к1}$.

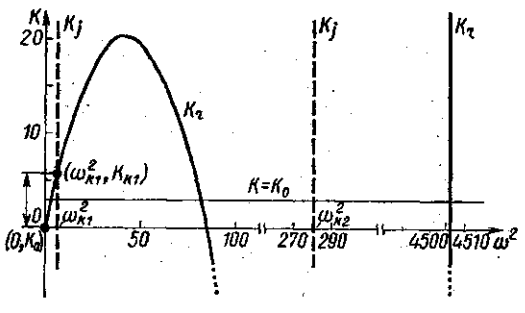

Рис. 3

3. **Особые случаи определения областей устойчивости.** При определенных значениях коэффициентов a_i и b_j характеристического уравнения (1) возникают особые случаи определения областей устойчивости. Они соответствуют некоторым характерным расположениям начальных и предельных точек траекторий корней.

А) Пусть характеристическое уравнение (1) имеет вид:

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)+Kp^m=0, \qquad (16)$$

где $m>0$ (m — кратная предельная точка в начале координат плоскости p).

Подставляя в (6а) и (7а) $b_0=1$, $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, в случае m четного получим формулы:

$$-K_r=\frac{a_n-\omega^2a_{n-2}+\omega^4a_{n-4}-\ldots}{(-\omega^2)^{m/2}},\quad \Phi_j=a_{n-1}-\omega^2a_{n-3}+\omega^4a_{n-5}-\ldots=0,$$

а в случае m нечетного —

$$\Phi_r=a_n-\omega^2a_{n-2}+\omega^4a_{n-4}-\ldots=0,\quad -K_j=\frac{a_{n-1}-\omega^2a_{n-3}+\omega^4a_{n-5}-\ldots}{(-\omega^2)^{(m-1)/2}}.$$

Индекс r или j в уравнениях возможных критических частот $\Phi_r=0$ или $\Phi_j=0$ указывает, каким кривым, K_r или K_j, они соответствуют.

Б) Пусть характеристическое уравнение (1) имеет вид

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)+K[a_0p^n-a_1p^{n-1}+\ldots+(-1)^na_n]=0. \qquad (17)$$

Как нетрудно видеть, предельные точки (17) являются зеркальным отображением начальных точек относительно мнимой оси $j\omega$.

Подставляя в (6а) и (7а) $b_0=a_0$, $b_1=-a_1$, ..., $b_n=(-1)^na_n$, получим формулы кривых K_r и K_j:

$$\Phi_r=a_n-\omega^2a_{n-2}+\omega^4a_{n-4}-\ldots=0,\quad K_r=(-1)^{n+1} \qquad (18)$$

и

$$\Phi_j=a_{n-1}-\omega^2a_{n-3}+\omega^4a_{n-5}-\ldots=0,\quad K_j=(-1)^n, \qquad (19)$$

которые на плоскости (ω^2, K) будут иметь вид вертикальных и горизонтальных прямых. Индексы r и j в (18) и (19) показывают, каким кривым они соответствуют.

В обоих случаях определение областей устойчивости производится аналогично тому, как это делалось для систем класса $[n; 0]$.

В заключение отметим, что рассмотренный метод определения областей устойчивости по формулам свободного параметра легко обобщить на случай, когда требуется найти области значений свободного параметра, при которых система имеет заданный запас устойчивости S. Для этого по формулам (3) и (4) при $\delta=-S$ строятся кривые K_r и K_j на плоскости (ω^2, K).

Формулы кривых K_r и K_j удобны для вычисления их на ЦВМ. Они являются, например, более простыми, чем соответствующие формулы D-разбиения по одному параметру [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964, 160 с. [2] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Исследование области устойчивых линейных и линеаризованных систем с помощью аналитического метода траектории корней. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, **14**, № 3, с. 305—316. [3] Фонсека Араухо У. Исследование динамических свойств систем высокого порядка с помощью аналитического метода траектории корней. — Автореф. канд. дис. М., МГУ, 1972, с. 1—17. [4] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн. 1. Под ред. В. В. Солодовникова. М., 1967, с. 622—637. [5] Беккер П. У. Об одном простом критерии устойчивости. — Тр. Амер. общества инженеров-механиков, 1964, **86**, сер. Д, № 1, с. 60—68. [6] Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. М., 1964, 700 с. [7] Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., 1967, 424 с. [8] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Частотные критерии устойчивости и их связь с методом траектории корней. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, **14**, № 2, с. 166—176.

Поступила в редакцию
06.04.79