$$[4;\ 4]\quad \frac{a_1^2-2a_2a_0}{K_{\text{кр}}}-(a_2b_0-a_1b_1+a_0b_2)-$$

$$-(-a_3b_0+a_2b_1-a_1b_2+a_0b_3)\,q_{\text{кр}}>0.$$

Заметим, что для систем с действительными начальными точками разность $a^2_1—2a_2a_0$ в неравенствах (22) представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, по крайней мере все системы класса [4; 0] с действительными начальными точками устойчивы в секторе Гурвица.

2. $b_m<0$. Этот случай соответствует $x_{\text{кр}}=0$. Раскрытие неравенств (21) через коэффициенты характеристического уравнения (4) приводит к сложным выражениям. Их анализ в общем виде затруднителен, но конкретные системы с помощью условий (21) исследуются легко.

Заключение. В статье сформулирован критерий, по которому можно определить принадлежность нелинейной системы классу систем, устойчивых в секторе Гурвица. Для систем высоких порядков исследование сводится к анализу положительных действительных корней полиномиального уравнения (12) с действительными коэффициентами. Для систем класса [3; m] и [4; m] получены области устойчивости в секторе Гурвица в пространстве параметров. Показано, что устойчивы в секторе Гурвица все системы с линейной частью класса [3; 0], а также [3; 1], [3; 2] и [3; 3] при положительности коэффициентов b_1, b_2 и b_3 соответственно. Кроме того, устойчивы в секторе Гурвица системы с линейной частью класса [4; 0] при условии действительности начальных точек линейной части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., 1963. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964, 160 с. [3] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Частотные критерии устойчивости и их связь с методом траекторий корней. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 2, с. 166—176. [4] Бендриков Г. А., Сидорова Г. А. Применение метода траекторий корней для исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем по критерию В. М. Попова. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 2, с. 177—186. [5] Šiljak D. D. Nonlinear systems. N. Y.—L., John Wiley and Sons, Inc., 1968, 611 p.

Поступила в редакцию
09.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 530.12:531.51

РЕГУЛЯРНЫЙ МИНИМУМ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА СОПУТСТВУЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

В. Г. Агаков
(ГАИШ)

1. **Постановка задачи.** В теории тяготения Эйнштейна отказ от условий однородности и изотропии пространства приводит к возможности прохождения объема элемента сопутствующего пространства через регулярный конечный минимум не только при космологической постоянной $\Lambda>0$, как в случае однородных изотропных моделей, но и при

$\Lambda<0$ и $\Lambda=0$ [1]. Таким образом, в теории анизотропной неоднородной вселенной становятся возможными такие решения уравнений Эйнштейна, согласно которым расширение сменяет собой сжатие, причем объем V элемента сопутствующего пространства проходит через регулярный минимум, соответствующий конечной плотности. Следовательно, перестает быть неизбежной идея, согласно которой наблюдаемое расширение Метагалактики началось с состояний бесконечной плотности. Для того чтобы решение с регулярным конечным минимумом V могло описывать вселенную, оно должно быть устойчивым, т. е. относиться к общему решению [2] (решению, содержащему максимальное число физически произвольных функций). В противном случае малое изменение параметров решения может привести к исчезновению регулярного конечного минимума V. Поэтому важно установить, проходит ли через регулярный конечный минимум объем элемента сопутствующего пространства в общем решении уравнений Эйнштейна. Целью настоящей статьи является рассмотрение этого вопроса для разных структур тензора энергии-импульса среды.

В работе [1] показано существование решения уравнений Эйнштейна при любых начальных данных, в котором масштабный фактор сопутствующего пространства проходит через регулярный конечный минимум. Этот результат получен при таком варианте полуобратного метода, при котором обеспечивается выполнение всюду сигнатурных условий, но закон вязкости задается не полностью; это может привести к тому, что члены, описывающие диссипативные процессы, становятся с течением времени недостаточно малыми, чтобы пользоваться понятием вязкости.

Заметим, что прохождение объема элемента сопутствующего пространства через регулярный конечный минимум даже в общем решении уравнений Эйнштейна не противоречит выводу о существовании общего решения с сингулярностью — состоянием бесконечной плотности и бесконечных инвариантов тензора четырехмерной кривизны, ибо для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которыми являются уравнения Эйнштейна, понятие общего решения не является однозначным — может существовать более чем один общий интеграл (см. [2]). В принципе возможно также существование общего решения, обладающего и регулярным конечным минимумом V и сингулярностью, которые имеют место в разных пространственно-временных областях.

Вместо изменения объема V элемента среды будем рассматривать изменение величины R — обобщенного масштабного фактора, пропорционального кубическому корню из объема V элемента среды и определенного с точностью до произвольной функции пространственных координат V_0: $R=(V/V_0)^{1/3}$, $V_0>0$, $\frac{\partial V_0}{\partial t}=0$. Условимся, что все координаты x^α вещественны, $x^0=ct$, $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, в местной галилеевой системе координат $ds^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$.

Будем рассматривать материю как среду, свободную от негравитационных и неинерциальных массовых сил, и пренебрегать потоком энергии относительно нее и второй вязкостью.

Будем пользоваться уравнениями закона тяготения

$$G_{0\nu}=-\varkappa\left(T_{0\nu}-\frac{1}{2}g_{0\nu}T\right)+\Lambda g_{0\nu}, \tag{1}$$

$$G_{ik}=-\varkappa\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right)+\Lambda g_{ik} \tag{2}$$

и уравнениями закона энергии и импульса в хронометрически инвариантной (х. и.) форме с учетом отсутствия второй вязкости и потоков энергии в системе отсчета, сопутствующей среде [3]:

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{{}^*\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}\varepsilon_{jl}\Pi^{jl}, \qquad (3)$$

$$\frac{{}^*\partial p}{\partial x^i} - F_i\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \left({}^*\nabla_j - \frac{1}{c^2}F_j\right)\varepsilon_i^j. \qquad (4)$$

Здесь $G_{\mu\nu}$ — четырехмерный тензор Риччи, $G = G_\nu^\nu$, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, c — фундаментальная скорость, ρ — х. и. плотность массы, p — истинное давление, F_i — х. и. вектор гравитационно-инерциальной силы, $\Pi_{ik} = D_{ik} - Dh_{ik}/3$, D_{ik} — х. и. тензор скоростей деформации, $D = D_i^i = \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t} = 3\,{}^*\dot{R}/R$, h_{ik} — х. и. метрический тензор, h — х. и. фундаментальный определитель, ε_{ik} — вязкий тензор напряжений, $\varepsilon_i^i = 0$, $T_{00} = \rho g_{00}$, $c^2 T_{ik} = ph_{ik} - \varepsilon_{ik}$, $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса среды, ${}^*\nabla_i$ — символ х. и. ковариантной производной; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — лишь 1, 2, 3. Х. и. операторы дифференцирования отмечены звездочкой, точка означает дифференцирование по временной координате t. Тогда

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{cg_{00}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Воспользуемся также теоремой, согласно которой в четырехмерной области пространства-времени с $g^{00} \neq 0$ система уравнений (2)—(4) эквивалентна системе уравнений (1)—(2), если уравнения (1) удовлетворяются в силу начальных данных (см., например, [4]).

Будем предполагать, что в рассматриваемой четырехмерной области пространства-времени $g^{00} \neq 0$, что начальная гиперповерхность Коши задается уравнением $x^0 = 0$, что на ней достигается регулярный конечный минимум R и начальные условия на ней удовлетворяют сигнатурным условиям и уравнениям (1). Величины $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ будем предполагать аналитическими функциями четырех координат и решение уравнений (2)—(4) будем искать в классе аналитических функций.

2. **Случай вязкой среды (полное задание закона вязкости).** Задав голоморфные функции K, η, наложим на $T_{\mu\nu}$ 9 ограничений: $p = K(\rho)$ — уравнение состояния, $\varepsilon_{ik} = 2\eta\Pi_{ik}$ (η — коэффициент первой вязкости, $\eta > 0$). $T_0^i = 0$ — условие сопутствия системы отсчета; зададим также $g_{00} = 1$. Неизвестными будут функции g_{ik}, ρ, g_{0i}, которые находятся из уравнений (2)—(4). Уравнения (2) при $g^{00} \neq 0$ представляют собой приводимые к нормальному виду уравнения второго порядка по t относительно g_{ik}, уравнение (3) — нормальное уравнение первого порядка по t относительно ρ, уравнения (4) — приводимые при $g_{0i} \neq 0$ к нормальному виду уравнения второго порядка по t относительно g_{0i}. Таким образом, уравнения (2)—(4) составляют систему 10 уравнений относительно g_{ik}, ρ, g_{0i}. В качестве начальных данных на гиперповерхности $x^0 = 0$ зададим значения 19 величин — голоморфных функций трех переменных: g_{ik}, $\dot{g}_{ik}$, ρ, g_{0i}, $\dot{g}_{0i}$, причем их выберем таким образом, чтобы: a) правые части приведенных к нормальному виду уравнений (2)—(4) были вещественными и голоморфными функциями в окрестности системы значений своих аргументов в некоторой точке $P(x_0^1, x_0^2,$

x_0^3) пространства при $x^0=0$; *б*) 4 уравнения (1) удовлетворялись при $x^0=0$ в силу начальных данных; *в*) при $x^0=0$ выполнялись условия $^*\dot{R}=0$, $^*\ddot{R}\geqslant 0$ регулярного минимума R. При выполнении *а* по теореме Коши — Ковалевской (см., например, [5]) в некоторой четырехмерной области, содержащей точку $O(0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, существует система голоморфных функций g_{ik}, ρ, g_{0i}, удовлетворяющих уравнениям (2)—(4) и начальным данным. При выполнении *б* эта система функций удовлетворяет также уравнениям (1) в некоторой четырехмерной области, содержащей точку O. При выполнении *в* на гиперповерхности $x^0=0$ достигается регулярный минимум R. Из условия $^*\dot{R}=0$ при $x^0=0$ следует равенство

$$-(\dot{g}_{ik})_0(g^{ik})_0+2(\dot{g}_{0i})_0(g_{0k})_0(g^{ik})_0=0,$$

которое представляет собой одно ограничение на начальные данные. (Величина $(g_{\mu\nu})_0$ представляет значение $g_{\mu\nu}$ в момент $x^0=0$.) Условие $^*\ddot{R}\geqslant 0$ при $x^0=0$ выделяет в пространстве начальных данных некоторую область.

Для подсчета числа физически произвольных функций (т. е. произвольных функций в максимально упрощенной системе координат данной системы отсчета) необходимо знать, какой произвол в выборе системы координат является еще допустимым. Наличие регулярного минимума R на гиперповерхности $x^0=0$ вместе с условием $g_{00}=1$ полностью фиксирует выбор временной координаты, так что допустимыми являются произвольные преобразования трех пространственных координат друг через друга: $\tilde{x}^i=\tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, с помощью которых три величины из начальных данных могут быть приведены к наперед заданным значениям. Таким образом, полученное решение уравнений Эйнштейна (1)—(2) содержит максимальное число (одиннадцать) физически произвольных функций трех переменных. Тот факт, что в решениях уравнений Эйнштейна при полном задании закона вязкости и $\eta\neq 0$ максимальное число физически произвольных функций трех переменных равно 11, было показано Л. П. Грищуком [6].

3. **Случай идеальной среды ($\eta=0$).** В некоторой области пространства-времени зададим 10 величин: $g_{00}=1$, $p=K(\rho)$, $\varepsilon_{ik}=0$, $T_0^i=0$. Неизвестными будут величины g_{ik}, ρ, g_{0i}. В случае идеальной среды уравнения (3)—(4) приобретают вид:

$$\dot{\rho}=-3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\equiv\Psi(x^\alpha), \tag{5}$$

$$\dot{g}_{0i}=\left(\frac{\partial p}{\partial x^i}-\frac{g_{0i}}{c}\dot{p}\right)\frac{1}{c\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)}\equiv\chi_i(x^\alpha). \tag{6}$$

В уравнения (2) входят величины $\frac{\partial\dot{g}_{0i}}{\partial x^k}$ (а величины $\ddot{g}_{0i}$ не входят); таким образом, наивысший порядок производных g_{0i} — второй. Поэтому постановка задачи Коши для неизвестных функций g_{ik}, ρ, g_{0i} по отношению к системе (2), (5), (6) неправомерна. Чтобы постановка задачи Коши для данных неизвестных функций по отношению к системе уравнений, содержащей уравнения (2), была корректной, необходимо иметь уравнение второго порядка по t относительно g_{0i}. Легко можно показать, что если функции ρ, g_{0i} и правые части Ψ, χ_i нормальных уравнений (5), (6) голоморфны в некоторой четырехмерной области, то в этой области система уравнений (5), (6) эквивалентна системе

$$\ddot{\rho}=\Psi, \qquad \ddot{g}_{0i}=\chi_i, \tag{7}$$

$$(\dot{\rho}_0)=(\Psi)_0, \qquad (\dot{g}_{0i})_0=(\chi_i)_0. \tag{8}$$

Тогда уравнения (2), (7) представляют собой систему 10 приводимых к нормальному виду уравнений второго порядка по t относительно g_{ik}, ρ, g_{0i}. В качестве начальных данных на гиперповерхности $x^0=0$ зададим значения 20 величин — голоморфных функций трех переменных: g_{ik}, $\dot{g}_{ik}$, ρ, $\dot{\rho}$, g_{0i}, $\dot{g}_{0i}$, выбирая их таким образом, чтобы: правые части приведенных к нормальному виду уравнений (2), (7) были вещественными и голоморфными функциями в окрестности системы значений своих аргументов в некоторой точке $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ пространства $x^0=0$; выполнялись условия *б, в*, п. 2; четыре условия (8) выполнялись в силу начальных данных. Тогда решение системы уравнений (1)—(2), которое существует в некоторой четырехмерной области, содержащей точку O $(0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, удовлетворяет начальным данным и содержит максимальное число (восемь) физически произвольных функций трех переменных.

4. **Решение уравнений Эйнштейна вблизи регулярного минимума** R. Вблизи регулярного минимума R рассмотрим характер деформации сопутствующего пространства, зависимость от времени объема V и плотности идеальной и вязкой среды при полном задании закона вязкости. Решение вблизи (по времени) регулярного минимума R, который достигается на гиперповерхности $x^0=0$, имеет вид:

$$g_{ik}=(g_{ik})_0+(\dot{g}_{ik})_0 t+\frac{1}{2}(\ddot{g}_{ik})_0 t^2+\ldots,$$

$$g_{0i}=(g_{0i})_0+(\dot{g}_{0i})_0 t+\frac{1}{2}(\ddot{g}_{0i})_0 t^2+\ldots,$$

$$\rho=(\rho)_0+(\dot{\rho})_0 t+\frac{1}{2}(\ddot{\rho})_0 t^2+\ldots,$$

где коэффициенты при степенях t есть либо данные Коши, либо величины, выраженные через данные Коши с помощью (2)—(4). Решение содержит максимальное число физически произвольных функций трех переменных. При достаточно малом $|t|$ значение ρ будет положительным, если $(\rho)_0$ задано положительным, и будут выполняться сигнатурные условия, если они выполнялись при $x^0=0$.

Условия регулярного минимума R в ортогональной трехмерной системе координат на гиперповерхности $x^0=0$ приобретают вид:

$$\frac{(\dot{h}_{11})_0}{(h_{11})_0}+\frac{(\dot{h}_{22})_0}{(h_{22})_0}+\frac{(\dot{h}_{33})_0}{(h_{33})_0}=0, \tag{9}$$

$$\frac{(\ddot{h}_{11})_0}{(h_{11})_0}+\frac{(\ddot{h}_{22})_0}{(h_{22})_0}+\frac{(\ddot{h}_{33})_0}{(h_{33})_0}\geqslant 0. \tag{10}$$

Выполнение равенства (9) возможно в следующих случаях: *1*) вблизи регулярного минимума R по одной координатной оси происходит сжатие пространства, по двум другим — расширение или наоборот (две величины из $(\dot{h}_{11})_0$, $(\dot{h}_{22})_0$, $(\dot{h}_{33})_0$ одного знака); *2*) по одной оси происходит сжатие, по другой — расширение, по третьей оси скорость деформации пространства при $x^0=0$ равна нулю; *3*) по всем координатным осям скорость деформации пространства при $x^0=0$ равна нулю. Случаи *2, 3* имеют место только при специальном выборе начальных данных. Неравенство (10) определяет ограничение на ускорение деформации пространства при $x^0=0$ по разным координатным осям.

Вблизи регулярного минимума R объем элемента пространства изменяется по закону

$$V=(V)_0+\frac{1}{2}(\ddot{V})_0 t^2+\ldots,\quad (\ddot{V})_0\geqslant 0.$$

Из (3) легко видеть, что в случае идеальной среды $(\dot{\rho})_0=0$, $(\ddot{\rho})_0\leqslant$ $\leqslant 0$, тогда вблизи регулярного минимума R плотность ρ изменяется по закону $\rho=(\rho)_0+(1/2)(\ddot{\rho})_0 t^2+\ldots$, таким образом, момент максимума плотности совпадает с моментом минимума объема. Однако в случае вязкой среды эти два момента не совпадают и плотность изменяется по закону $\rho=(\rho)_0+(\dot{\rho})_0 t+(1/2)(\ddot{\rho})_0 t^2+\ldots$, причем $(\dot{\rho})_0>0$.

Скалярное уравнение Эйнштейна в х. и. форме при $x^0=0$ можно представить в виде [3]

$$3\left(\frac{{}^*\ddot{R}}{R}\right)_0+(\Pi_{ik}\Pi^{ik})_0-(A_{ik}A^{ik})_0+\left({}^*\nabla_j F^j-\frac{1}{c^2}F_j F^j\right)_0=$$

$$=-\frac{\varkappa}{2}(\rho c^2+3p)_0+\Lambda c^2.$$

Поскольку ${}^*\ddot{R}\geqslant 0$ на гиперповерхности $x^0=0$, где достигается регулярный минимум R, и $\Pi_{ik}\Pi^{ik}\geqslant 0$ именно в силу наличия вращения (A_{ik} — х. и. тензор угловой скорости вращения) или отрицательной физической дивергенции гравитационно-инерциальной силы при $x^0=0$, начальное значение плотности $(\rho)_0$ может быть задано положительным.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Л. Зельманову и Л. П. Грищуку за помощь в работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зельманов А. Л. К вопросу о деформации сопутствующего пространства в теории тяготения Эйнштейна. — ДАН СССР, 1960, **135**, № 6, с. 1367—1370. [2] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии. — УФН, 1970, **102**, № 3, с. 463—500. [3] Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной. — В кн.: Тр. 6-го сов. по вопросам космогонии, М., 1957; изд. АН СССР, М., 1959, с. 144—173. [4] Синг Д. Общая теория относительности. М., 1963, 432 с. [5] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961, 400 с. [6] Грищук Л. П. К проблеме сингулярностей в решениях уравнений Эйнштейна. Автореф. канд. дис. М., ГАИШ, 1967, 8 с.

Поступила в редакцию
09.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, т. 22, № 2

УДК 539.293.5.011

ГЛУБОКИЙ ХВОСТ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ В СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Н. В. Бурбаева

(кафедра физики полупроводников)

Задача о глубоком хвосте плотности состояний в полупроводнике, легированном мелкими примесными атомами, была рассмотрена методом оптимальной флуктуации [1] в работе [2]. Были получены ре-