УДК 621.374.4

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Л. В. Балакин, М. Д. Карасев, В. И. Медведев

(кафедра физики колебаний)

В [1] теоретически рассмотрена возможность нелинейно-параметрического деления частоты в большое число раз с помощью высокодобротной колебательной системы, находящейся под действием источника гармонических колебаний делимой частоты. Такое деление частот было реализовано на модели баланса часов и на базе механизмов электрических часов Б4М и Б9М [2] и позволило с помощью одного резонатора получить кратность деления $m \leqslant 100$, устойчиво сохраняющуюся как при значительной нестабильности амплитуды делимой частоты, так и при сильных механических возмущающих вибрациях.

При этом было обнаружено, что амплитуда стационарных колебаний баланса в пределах полосы делений увеличивается с ростом частоты делимого колебания на несколько десятков градусов и уменьшается с уменьшением частоты делимого колебания. Кроме того, минимальная стационарная амплитуда поделенных колебаний увеличивается с ростом кратности деления m. Последний эффект происходит вследствие того, что при больших кратностях деления маятнику (балансу) необходима большая скорость движения магнитов маятника в зазоре катушки возбуждения, чтобы обеспечить достаточное вложение энергии в систему, в противном случае, если время взаимодействия катушки с магнитами $\tau = \Delta x / A\Omega$ (A — амплитуда колебаний маятника, Ω — его частота, Δx — длина области взаимодействия катушки возбуждения с магнитами маятника) будет больше половины периода делимой частоты ω ($T/2 = \pi/\omega$), то вклад энергии в систему будет уменьшаться по сравнению с оптимальным случаем $\tau = T/2$. Амплитуда стационарных колебаний ограничена величиной 360°, так как при большей амплитуде магниты будут четыре раза за период колебаний маятника взаимодействовать с катушкой, а это приведет к фазовому сбою в работе делителя и затуханию колебаний маятника.

Таким образом, увеличение амплитуды стационарных колебаний маятника с увеличением кратности деления накладывает принципиальное ограничение на верхний предел m. Вторым недостатком исследованного ранее [2] делителя частоты является непрерывное потребление тока катушкой возбуждения от источника накачки в течение всего периода колебаний маятника.

Рассмотренный ниже усовершенствованный нелинейно-параметрический делитель частоты свободен от этих недостатков и позволяет, во-первых, отбирать энергию только в те отрезки времени, когда катушка возбуждения взаимодействует с маятником, и, во-вторых, получать высокие кратности деления при малых стационарных амплитудах колебаний маятника.

Блок-схема усовершенствованного делителя частоты приведена на рис. 1. Если задать некоторую начальную амплитуду колебаний маятника, то он, проходя через катушку возбуждения, наводит своими магнитами некоторую ЭДС в этой катушке. Полученный двухполярный импульс поступает на схему компенсации, затем усиливается и подается

на ждущий блокинг-генератор. Последний вырабатывает короткий импульс, длительностью несколько микросекунд, который запускает ждущий мультивибратор. Прямоугольный импульс с этого мультивибратора, длительность которого можно менять в широких пределах и кото-

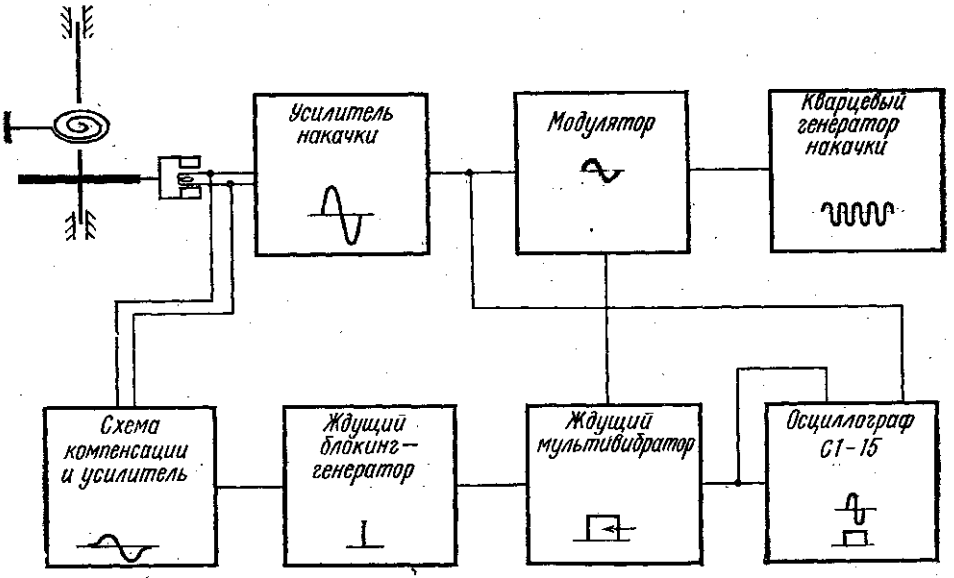

Рис. 1. Блок-схема усовершенствованного фазочувствительного делителя частоты

рая устанавливается равной половине периода колебаний напряжения накачки (делимой частоты), поступает на модулятор. Модулятор пропускает синусоидальное напряжение накачки на время, равное длительности прямоугольного импульса. Это напряжение после усиления поступает на катушку возбуждения. При определенных соотношениях между частотой накачки и собственной частотой маятника и достаточном усилении напряжения накачки устанавливается стационарный режим колебаний маятника. Деление частоты наблюдается с помощью двухлучевого осциллографа С1—15, на один вход которого подается промодулированное напряжение накачки, а на другой — прямоугольные импульсы от ждущего мультивибратора.

Экспериментально была исследована зависимость амплитуды стационарных колебаний маятника в области деления от частоты генератора накачки. На рис. 2, *а* показана такая зависимость при $m=62$. Видно, что амплитуда однозначно зависит от изменения делимой частоты, причем амплитуда колебаний растет с увеличением делимой частоты и уменьшается с ее уменьшением. При больших кратностях деления, например $m=92$ (рис. 2, *б*), наблюдается другая зависимость амплитуды стационарных колебаний от изменения частоты делимых колебаний и, кроме того, имеет место неоднозначность этой зависимости. При высоких кратностях деления в зависимости от начальных условий в системе может устанавливаться одно из двух стационарных колебаний, отличающееся от другого по амплитуде на несколько градусов и по фазе на $90°/m$.

Теоретическое рассмотрение некоторых особенностей работы нелинейно-параметрического делителя частоты с фиксированным временем взаимодействия дано в [3], где, в частности, показано, что наиболее

эффективное и экономичное взаимодействие внешней силы с резонатором происходит при $\omega\tau=\pi$. Однако вследствие того, что в эксперименте время взаимодействия τ устанавливается практически так, что произведение $\omega\tau$ лишь приближенно равняется π, то необходимо рассмотреть теоретически особенности поведения системы при $\omega\tau\gtrless\pi$, а также исследовать явление неоднозначности стационарных амплитуд.

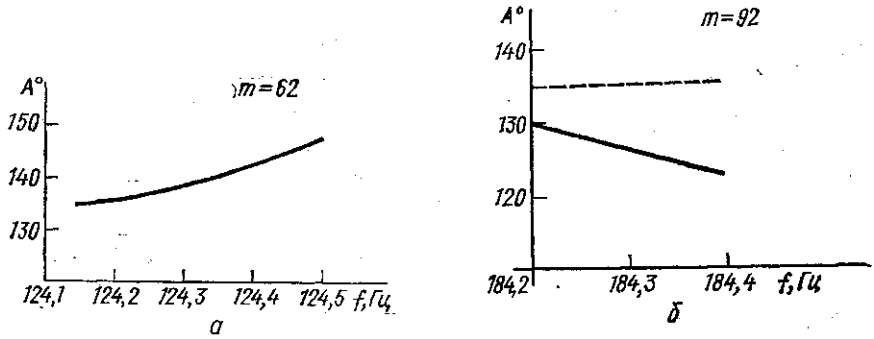

Рис. 2. Зависимость амплитуды поделенного колебания от частоты делимого колебания в области деления: $m=62$ (*а*) и 92 (*б*)

Процесс нелинейно-параметрического деления частоты описывается [1, 2, 3] уравнением

$$\ddot{x}+2\delta(x)\dot{x}+\Omega_0^2[1-\gamma(x)]x=P(x,\dot{x})\cos\omega t, \tag{1}$$

где $2\delta(x)$ — нелинейное затухание, $\gamma(x)$ — коэффициент реактивной нелинейности, Ω_0 — собственная частота низкочастотной колебательной системы, $P(x,\dot{x})$ — амплитуда воздействия на колебательную систему, зависящая от характера взаимодействия колебательной системы и источника делимой частоты ω.

Если ввести когерентную частоту $\Omega=\omega/m\approx\Omega_0$, где m — целое число, положить $\gamma(x)=\gamma x^2$, $\delta(x)=\delta+\alpha x^2$ и считать, что взаимодействие между маятником и катушкой возбуждения происходит вблизи положения равновесия маятника, а характер взаимодействия имеет вид

$$P(x,\dot{x})=P_0[\sigma(\tau-\varphi)-\sigma[\tau-(\varphi+\psi)]], \tag{2}$$

где $\sigma(x)$ — единичная функция ($\sigma(x)=0$ при $x<0$ и $\sigma(x)=1$ при $x\geqslant 0$), то методом медленно-меняющихся амплитуд можно получить систему укороченных уравнений

$$\dot{A}=-\delta A+\frac{2P_0}{\pi m\Omega}M-(1/8)\alpha A^3,$$

$$\dot{\varphi}=-\Delta\Omega+(3/8)\gamma\frac{\Omega_0^2}{\Omega}A^2+\frac{2P_0}{2\pi Am\Omega}N, \tag{3}$$

где

$$\Delta\Omega=\frac{\Omega_0^2-\Omega^2}{2\Omega}\simeq\Omega_0-\Omega;$$

$$M=\sin(m\psi+m\varphi)\cos\psi-\sin m\varphi;\ N=\sin(m\psi+m\varphi)\sin\psi.$$

Анализ силовых компонент в (3) в предположении, что m — нечетное, показывает, что они тождественно равны нулю, т. е. в одну по-

ловину периода колебания маятника энергия вкладывается в него, а в следующую половину периода — отбирается.

Рассмотрим случай, когда половина периода делимой частоты больше времени прохождения магнитами маятника области взаимодействия с катушкой (Δx), т. е. $T/2 > \Delta x/A\Omega$, где $A\Omega$ — скорость прохождения магнитами маятника положения равновесия. Последнее неравенство можно записать в другом виде:

$$\Delta x/A < \pi/m. \tag{4}$$

С учетом условия (4) находим величину ψ. Так как $A\sin(\varphi+\psi-\varphi) = \Delta x$, то в силу $\Delta x/A \ll 1$ получаем $\psi = \Delta x/A$, и тогда уравнения (3) приобретают вид

$$\dot{A} = -\delta A + \frac{2P_0}{\pi m\Omega}\left[\sin\left(\frac{m\Delta x}{A} + m\varphi\right) - \sin m\varphi\right] - (1/8)\,\alpha A^3,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta\Omega + (3/8)\,\gamma\frac{\Omega_0^2}{\Omega}A^2 + \frac{2P_0\Delta x}{2\pi m\Omega A^2}\sin\left(\frac{m\Delta x}{A} + m\varphi\right). \tag{5}$$

Из системы (5) найдем зависимость стационарной амплитуды A_0 поделенных колебаний от частоты ω, удерживая члены порядка 10^{-1} и отбрасывая члены более высокого порядка малости. Принимая, что $\Delta x \sim 10^{-1}$, $\gamma < 0$, $\Delta\Omega = \Omega_0 - \omega/m$; $\delta \sim 10^{-2}$, $\alpha \sim 10^{-3}$, $P_0 \sim 20$, $m \sim 30$, $\Omega \sim 10$; $A_0 \sim \pi$, $\gamma \sim 10^{-4}$, получаем

$$(3/8)\,\gamma\frac{\Omega_0^2}{\Omega}A_0^2 = \Omega_0 - \frac{\omega}{m}. \tag{6}$$

Таким образом, в полосе деления амплитуда A_0 растет с ростом ω, что качественно согласуется с результатом проведенного эксперимента (см. рис. 2, *а*).

Исследование устойчивости стационарных амплитуд и фаз, определенных системой (5), приводит к следующему фазовому условию устойчивости:

$$-\pi < m\varphi_0 < -\pi/2, \tag{7}$$

где φ_0 является решением (5) при $\dot{A} = 0$; $\dot{\varphi} = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда половина периода делимой частоты меньше времени прохождения магнитами маятника области взаимодействия с катушкой:

$$\frac{T}{2} < \frac{\Delta x}{A\Omega} \text{ или } \frac{\Delta x}{A} > \frac{\pi}{m}. \tag{8}$$

В этом случае взаимодействие магнитов маятника с катушкой возбуждения определяется половиной периода делимой частоты, т. е. $\psi = \Omega t'$, где $t' = T/2$ устанавливается нами и определяется из условия максимального вклада энергии в колебательную систему ($\omega t' = \pi$). Тогда система (3) приобретает вид

$$\dot{A} = -\delta A - \frac{2P_0}{\pi m\Omega}\sin m\varphi - (1/8)\,\alpha A^3,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta\Omega + (3/8)\,\gamma\frac{\Omega_0^2}{\Omega}A^2 - \frac{2P_0}{2Am^2\Omega}\sin m\varphi. \tag{9}$$

В стационарном случае из (9) находим зависимость амплитуды колебаний маятника A_0 от делимой частоты ω:

$$\left((3/8)\,\gamma\Omega + (1/16)\frac{\alpha\pi}{m}\right)A_0^2 + \frac{\pi\delta}{2m} = \Omega_0 - \frac{\omega}{m}. \qquad (10)$$

Из (10) видно, что амплитуда A_0 уменьшается с ростом ω (сравните со сплошной линией рис. 2, *б*); если

$$\frac{\alpha\pi}{m\Omega} > -6\gamma. \qquad (11)$$

Исследование устойчивости нелинейных стационарных решений системы (9) приводит для этого случая к следующему фазовому условию устойчивости:

$$-\pi/2 < m\,\varphi_0 < 0. \qquad (12)$$

Из условия устойчивости стационарных амплитуд $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$ получаем неравенство, совпадающее с (11), из которого видно, что колебательная система с положительной реактивностью ($\gamma>0$) обладает устойчивостью при более высоких кратностях деления m, чем система с отрицательной нелинейностью ($\gamma<0$). Рассматриваемый механический делитель частоты имеет отрицательную реактивную нелинейность, и при больших кратностях деления m устойчивость стационарных значений амплитуды и фазы колебаний маятника нарушается. Таким образом, для делителя частоты с отрицательной реактивной нелинейностью условие (11) определяет верхнюю границу кратности деления m при принятом характере взаимодействия маятника с катушкой возбуждения. Однако можно показать, что если характер взаимодействия в системе более сложный, то к члену $(1/8)\alpha A^3$ (9) прибавляется еще одно нелинейное затухание, зависящее от m, P_0, A, φ, и стационарные колебания маятника могут быть устойчивыми при бо́льших кратностях деления m, определяемых (11).

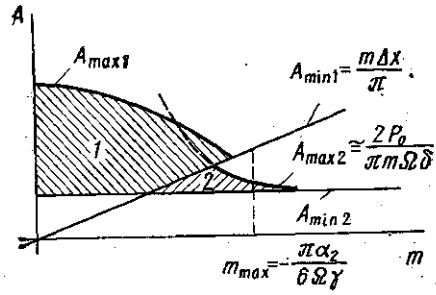

Рис. 3. Амплитудные границы областей деления в зависимости от кратности деления

На рис. 3 графически проиллюстрированы оба рассмотренных случая ($\Delta x/A<\pi/m$; $\Delta x/A>\pi/m$), где показана зависимость стационарных амплитуд от кратности деления m. Заштрихованная область *1* — область устойчивых стационарных амплитуд для случая $\Delta x/A<\pi/m$; область *2* — для случая $\Delta x/A>\pi/m$. Максимальное значение амплитуды $A_{\max 1}$ в первом случае определяется из системы (5), приближенно из (6). Минимальное значение стационарной амплитуды $A_{\min 1}$ определяется из соотношения (4). Зависимость $A_{\max 2}$ от m получается из (8), (10), а $A_{\min 2}$ определяется минимальной амплитудой, необходимой для запуска электронной схемы делителя частоты точно в момент прохождения маятником положения равновесия.

Как видно из графика рис. 3, существуют кратности деления m, при которых имеет место перекрытие областей *1* и *2*, где возможны стационарные режимы деления частоты, т. е. в области перекрытия существует неоднозначность стационарных решений. Вне областей перекрытия имеет место однозначность устойчивых стационарных ампли-

туд колебаний. Эксперимент подтвердил эти выводы теории (см. рис. 2, *а*, *б*).

Важной характеристикой таких нелинейно-параметрических делителей частоты являются особенности переходных процессов в них, которые наряду со стационарными режимами работы определяют возможность их использования. Численный расчет процессов установления производился в предположении не бесконечно крутых фронтов взаимодействия маятника с катушкой возбуждения (2), а при условии конечного времени фронта взаимодействия, когда амплитуда внешнего воздействия аппроксимируется либо одной гауссовой кривой

$$P(x, \dot{x}) = P_0 e^{-\frac{x^2}{(\Delta x)^2}}, \tag{13}$$

либо двумя гауссовыми кривыми

$$P(x, \dot{x}) = P_0 \left[e^{-\frac{(x+\Delta x)^2}{(\Delta x^2)}} - e^{-\frac{(x-\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}}\right]. \tag{14}$$

В этом случае система укороченных дифференциальных уравнений, описывающая процесс деления частоты в нелинейно-параметрическом делителе, имеет вид

$$\dot{A} = -\delta A + \frac{P_1 \cos\varphi + P_2 \sin\varphi}{2\Omega},$$

$$\dot{\varphi} = -(\Omega - \Omega_0) + (3/8)\gamma \frac{\Omega_0^2}{\Omega} A^2 + \frac{P_2 \cos\varphi - P_1 \sin\varphi}{2A\Omega}, \tag{15}$$

где P_1 и P_2 имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x, \dot{x}) \cos m\tau \cdot \cos \tau d\tau; \quad P_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x, \dot{x}) \cos m\tau \cdot \sin \tau d\tau. \tag{16}$$

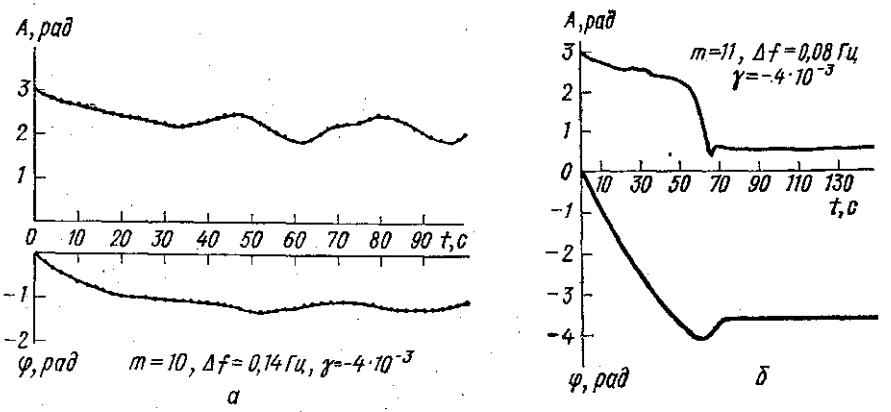

Рис. 4. Процессы установления амплитуды и фазы поделенного колебания во времени при условии (14) (*а*) и при условии (13) (*б*)

Решение системы интегродифференциальных уравнений (15) производилось на БЭСМ-4М с помощью стандартной процедуры *KUTTAMERSON*. При этом в процессе счета менялись как начальные значения амплитуды и фазы, так и параметры m, ω/m, γ. Из численных расчетов процесса установления, а также из физики процесса деления следует, что такой делитель частоты весьма чувствителен к изменению фазы колебаний маятника. Поэтому для случая (14) при неблагоприятных

фазах на границах областей деления частоты установление режима деления либо не происходит, либо амплитуда и фаза флуктуируют около некоторых средних значений (рис. 4, *а*). При этом, как показали численные расчеты, величины этих флуктуаций зависят от расстройки делимой частоты $\Delta\omega$ и начальных значений амплитуды и фазы колебаний маятника.

Для случая (13) нелинейно-параметрический делитель частоты, описанный системой (15), менее чувствителен к изменению фазы колебания маятника, и поэтому становится возможным получение стационарного режима деления без флуктуаций амплитуды и фазы колебаний маятника, как это показано на рис. 4, *б*. При этом время установления стационарного режима составляет несколько десятков секунд при периоде поделенных колебаний, равном 0,5 с. Таким образом, численный расчет процесса деления частоты также показал возможность существования строго когерентного режима деления для механического нелинейно-параметрического делителя частоты, когда время нарастания взаимодействия между маятником и катушкой возбуждения отлично от нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Карасев М. Д. Нелинейно-параметрическое деление частоты в большое число раз.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, **15**, № 3, с. 365—368. [2] Белов А. А., Карасев М. Д., Медведев В. И. и др. Исследование нелинейно-параметрической колебательной системы для однократного деления частоты в большое число раз.— Тр. НИИЧаспрома, 1976, вып. 22, с. 29—37. [3] Карасев М. Д. Нелинейно-параметрическое деление частоты в большое число раз при фиксированном времени взаимодействия. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, **18**, № 4, с. 109—111.

Поступила в редакцию
10.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1981, Т. 22, № 3

УДК 550.5

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРИСТАЛЛОВ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА

М. В. Авдулов

(кафедра физики Земли)

Известно, что в первом приближении земной шар можно разделить на три главные зоны: земная кора (0—35 км), оболочка Земли (35—2900 км), земное ядро (2900—6371 км). В первом тысячекилометровом слое оболочки, получившем название верхней мантии, градиенты плотности и скорости упругих колебаний аномально велики. Теоретические исследования Ф. Берча и В. А. Магницкого [1, 2] позволили установить, что аномалии плотности и скорости упругих колебаний в верхней мантии вызваны полиморфными превращениями в силикатах. Позднее эта гипотеза была экспериментально подтверждена работами А. Рингвуда, Д. Грина, С. Акимото и др.

Сейчас можно не сомневаться в том, что земная кора выделилась из верхней мантии в процессе ее дифференциации по минералогическому составу. Большинство исследователей полагают, что процесс выделения земной коры из верхней мантии связан с плавлением материала оболочки. Против такой точки зрения можно высказать несколько возражений, из них мы остановимся на двух важнейших.