

фазах на границах областей деления частоты установление режима деления либо не происходит, либо амплитуда и фаза флуктуируют около некоторых средних значений (рис. 4, а). При этом, как показали численные расчеты, величины этих флуктуаций зависят от расстройки делимой частоты  $\Delta\omega$  и начальных значений амплитуды и фазы колебаний маятника.

Для случая (13) нелинейно-параметрический делитель частоты, описанный системой (15), менее чувствителен к изменению фазы колебания маятника, и поэтому становится возможным получение стационарного режима деления без флуктуаций амплитуды и фазы колебаний маятника, как это показано на рис. 4, б. При этом время установления стационарного режима составляет несколько десятков секунд при периоде поделенных колебаний, равном 0,5 с. Таким образом, численный расчет процесса деления частоты также показал возможность существования строго когерентного режима деления для механического нелинейно-параметрического делителя частоты, когда время нарастания взаимодействия между маятником и катушкой возбуждения отлично от нуля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Карасев М. Д. Нелинейно-параметрическое деление частоты в большое число раз.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, 15, № 3, с. 365—368. [2] Белов А. А., Карасев М. Д., Медведев В. И. и др. Исследование нелинейно-параметрической колебательной системы для однократного деления частоты в большое число раз.— Тр. НИИЧаспрома, 1976, вып. 22, с. 29—37. [3] Карасев М. Д. Нелинейно-параметрическое деление частоты в большое число раз при фиксированном времени взаимодействия.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 4, с. 109—111.

Поступила в редакцию  
10.04.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 3

УДК 550.5

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРИСТАЛЛОВ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА

М. В. Авдулов

(кафедра физики Земли)

Известно, что в первом приближении земной шар можно разделить на три главные зоны: земная кора (0—35 км), оболочка Земли (35—2900 км), земное ядро (2900—6371 км). В первом тысячекилометровом слое оболочки, получившем название верхней мантии, градиенты плотности и скорости упругих колебаний аномально велики. Теоретические исследования Ф. Берча и В. А. Магницкого [1, 2] позволили установить, что аномалии плотности и скорости упругих колебаний в верхней мантии вызваны полиморфными превращениями в силикатах. Позднее эта гипотеза была экспериментально подтверждена работами А. Рингвуда, Д. Грина, С. Акимото и др.

Сейчас можно не сомневаться в том, что земная кора выделилась из верхней мантии в процессе ее дифференциации по минералогическому составу. Большинство исследователей полагают, что процесс выделения земной коры из верхней мантии связан с плавлением материала оболочки. Против такой точки зрения можно высказать несколько возражений, из них мы остановимся на двух важнейших.

1. Данные сейсмологии последних лет определенно свидетельствуют о том, что по крайней мере до границы с ядром недра Земли находятся в кристаллическом состоянии и даже в районах активного вулканизма отсутствуют полости или камеры, в которых материал находится в состоянии полного расплава.

2. Данные о распределении температуры в недрах Земли, полученные разными авторами, указывают, что кривая температуры в верхней мантии лежит по крайней мере на несколько сот градусов ниже температуры солидуса горных пород. В этих условиях даже частичное плавление силикатов мантии становится делом крайне маловероятным, и для объяснения дифференциации верхней мантии по минералогическому составу следует привлекать другие физические принципы.

Горные породы, входящие в состав верхней мантии, представляют собой агрегаты минералов с разными физическими свойствами, что позволяет эти минералы разделить на две группы. К первой относятся кристаллы, у которых при температурах и давлениях, соответствующих условиям верхней мантии, имеет место полиморфный переход, ко второй — кристаллы, не испытывающие фазового перехода и которые можно рассматривать как сплошную среду с равномерно распределенными в ней кристаллами первой группы.

Допустим теперь, что в рассматриваемом объеме температура периодически меняется и вместе с ней пульсируют кристаллы первой группы, меняя свой объем. Тогда можно поставить вопрос: может ли привести пульсация кристаллов к изменению их пространственного положения или же изменение объема горной породы происходит с сохранением структуры. Вопрос о причинах периодических изменений температуры в настоящей работе не рассматривается, поскольку он уже был изучен в [3].

Представим себе объем, заполненный жидкостью, внутри которого находится пульсирующая сфера. Условием неподвижности центра сферы является симметрия потока относительно ее центра. Если справа от сферы появилось препятствие в виде стенки, линии тока будут искривлены. Тогда импульс жидкости, направленный на стенку, будет меньше импульса в обратном направлении. В соответствии с третьим законом Ньютона давление жидкости на сферу справа, т. е. со стороны стенки, будет меньше, чем слева. Разность давлений справа и слева заставляет сферу двигаться в сторону препятствия. Если стенку убрать и заменить ее другой сферой, то распределение линий тока остается без изменений. Поэтому две сферы, пульсирующие в фазе, притягивают друг друга. В Бьеркнесом было показано [4], что сила взаимодействия между двумя пульсирующими сферами пропорциональна плотности жидкости, произведению объемных скоростей обеих сфер на косинус разности фаз их колебаний и обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами сфер:

$$F = \rho \frac{\dot{V}_1 \dot{V}_2}{8\pi l^2} \cos \psi, \quad (1)$$

где  $\dot{V} = 4\pi R^2 \dot{R}$ . Здесь  $R$  — радиус сферы,  $l$  — расстояние между их центрами. Полезно отметить, что сфера движется в сторону препятствия как при цикле расширения, так и сжатия, поскольку для жидкости условие равенства нулю нормальной составляющей скорости на твердой границе  $v_n = 0$  должно выполняться в обоих случаях. Этот же вывод следует из общего вида формулы (1). В выражении (1)  $\psi$  — разность фаз пульсирующих сфер, и  $\cos \psi = 1$  всегда, если сферы пульсируют в фазе. Сила взаимодействия между двумя пульсирующими сферами

меняет знак (становится отталкивающей), если  $\cos \psi = -1$ , т. е. когда сферы пульсируют в противофазе.

Задача Бьеркнеса о взаимодействии двух сфер может быть обобщена на случай системы с конечным числом пульсирующих шаров. Для системы из  $N$  пульсирующих сфер формула (1) имеет вид

$$F_i = 0,5 \rho R_i^2 \dot{R}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\dot{V}_j}{l_{ij}^2} \cos \varphi_j, \quad (2)$$

где  $\cos \varphi_j = \cos(z, l_{ij})$ ,  $z$  — направление, для которого вычисляется смещение  $i$ -го шара.

Уравнение движения сферы, перемещающейся в жидкости под влиянием силы  $F_i$ , можно записать так:

$$F_i = \frac{4}{3} \pi R_i^3 (\rho_0 + 0,5 \rho) \frac{du_i}{dt}, \quad (3)$$

здесь  $\rho_0$  — плотность сферы,  $\rho$  — плотность жидкости,  $u_i$  — скорость поступательного движения сферы.

Полагая  $\rho_0 = \rho$ , получим

$$F_i = 2\pi R_i^3 \rho \frac{du_i}{dt}. \quad (4)$$

Приравнявая (2) и (4), находим

$$2\pi R_i^3 \rho \frac{du_i}{dt} = 0,5 \rho R_i^2 \dot{R}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\dot{V}_j}{l_{ij}^2} \cos \varphi_j. \quad (5)$$

В уравнении (5) следует учесть силу вязкого сопротивления. Диссипативный член, соответствующий рассматриваемому случаю (число Рейнольдса  $Re \gg 1$ ), как показано в [5], имеет вид

$$Q = 12\pi \eta R^3 \dot{R} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (6)$$

Отсюда находим, полагая все кристаллы одинаковыми, т. е.  $R_i = R_j$ :

$$\frac{du_i}{dt} = R \dot{R}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2} - \frac{6\eta \dot{R}}{\rho} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (7)$$

Положим в (7)  $R = a$ , где  $a$  — радиус кристалла в низкотемпературной фазе. Пусть далее

$$l'_{ij}(t) = l_{ij}(0) + \Delta l_{ij}(t).$$

Поскольку, однако, в пределах каждого цикла  $\Delta l_{ij} \ll l_{ij}$ , мы можем считать  $l'_{ij} = l_{ij}(0)$ . Погрешность, которая при этом допускается, имеет порядок  $10^{-3}$ . Тогда имеем

$$\frac{du_i}{dt} = a \dot{a}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2} - \frac{6\eta \dot{a}}{\rho} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно записать так:

$$du_i = a\dot{a}^2 \left(1 - \frac{6\eta}{a\rho}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2} dt.$$

Интегрируем это равенство по  $u_i$  в пределах от 0 до  $u_i^*$  и по  $t$  в пределах от 0 до  $\Delta a/\dot{a}$ , полагая  $\dot{a} = \text{const}$ :

$$u_i^* = a\dot{a}\Delta a \left(1 - \frac{6\eta}{a\rho}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (9)$$

Переходя в (9) к средней величине, получим

$$u_i = 0,5 a\dot{a}\Delta a \left(1 - \frac{6\eta}{a\rho}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (10)$$

Смещение сферы мы найдем, если (10) умножим на время фазового перехода. Учитывая, что поступательное движение сферы происходит как в фазе расширения, так и сжатия, получим для смещения за один полный цикл

$$S_i = a\Delta a^2 \left(1 - \frac{6\eta}{a\rho}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (11)$$

Известно, что вязкость земной оболочки имеет значение  $\eta = 10^{22} - 10^{26}$  пауз. Отсюда можно ожидать, что фазовые переходы в мантии практически не реализуются или реализуются крайне медленно до тех пор, пока термические напряжения не превысят предела упругости горной породы  $\sigma = 10^8$  дин/см<sup>2</sup>. По достижении этой величины материал переходит в пластичное состояние и напряжения сбрасываются быстро.

Скорость деформации кристалла можно выразить через характеристики движущихся дислокаций следующим уравнением:

$$\dot{\epsilon} = nvb, \quad (12)$$

где  $n$  — число дислокаций, движущихся на единице площади,  $v$  — их средняя скорость,  $b$  — вектор Бюргерса.

Скорость движения дислокаций в первом приближении связана со скоростью упругих поперечных колебаний равенством (13) [6]

$$v = \frac{\sigma V_s}{\mu} \cdot 10^3, \quad (13)$$

где  $V_s$  — скорость упругих поперечных колебаний в кристалле,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\sigma$  — напряжение.

В типичных случаях деформации порядка 10% плотность дислокаций составляет  $10^9$  см<sup>-2</sup> [7]. Вектор Бюргерса имеет порядок межатомных расстояний, и мы можем положить его равным  $10^{-8}$  см. Полагая  $\sigma = 10^8$  дин/см<sup>2</sup>,  $\mu = 0,7 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>,  $V_s = 5$  км/с, что соответствует глубинам около 400 км, находим  $\dot{\epsilon} = 7 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>.

Другой способ определения скорости пластического течения минералов состоит в оценке скорости течения горных масс в очагах земле-

трясений. По оценке Х. Беньофа [8], скорость распространения разрыва близка к скорости волн Рэлея  $0,9 V_s$ . И если  $V_s = 5$  км/с, то скорость пластического течения приблизительно равна 4,5 км/с.

Обратимся к диаграмме равновесия двух фаз (рисунок). Пусть в начальный момент времени элемент массы занимает положение  $A_0$  на кривой фазового перехода, но находится в поле устойчивого состояния низкотемпературной фазы. Если температура растет, то должен произойти фазовый переход. Однако, учитывая большую вязкость оболочки, можно ожидать, что полиморфный переход не произойдет, так как с увеличением температуры возникнут напряжения на границах кристалла, и на фазовой диаграмме рисунка элемент массы начнет двигаться вверх и вправо. Если допустить, что в процессе такого движения кристалл сместится с кривой фазового перехода в сторону высоких давлений, локальные напряжения на его границах будут сброшены, что заставит элемент массы сместиться влево, в сторону низких давлений, и вновь вернуться на кривую фазового равновесия. Поэтому можно полагать, что элемент массы будет двигаться вправо и вверх вдоль кривой фазового перехода. Это движение будет продолжаться, пока превышение давления над гидростатическим ( $\Delta p$  на рисунке) не достигнет величины  $10^8$  дин, после чего произойдет полиморфный переход. Превышение температуры над равновесной величиной, необходимое для температурных напряжений  $10^8$  дин/см<sup>2</sup>, определяется наклоном кривой фазового равновесия. В случае перехода оливин — «шпинель» наклон кривой фазового равновесия равен  $44^\circ$  на килобар [9]. Отсюда для  $\Delta p = 10^8$  дин необходимо  $\Delta T = 4,4^\circ\text{C}$ .

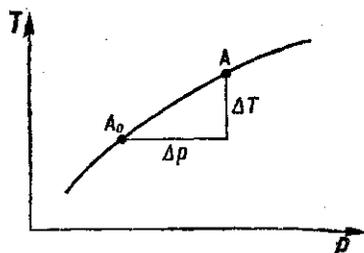


Диаграмма равновесия двух фаз

Для оценки вязкости кристаллического материала в состоянии пластического течения воспользуемся известным реологическим равенством

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (14)$$

где  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации,  $\sigma$  — напряжение,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости.

Полагая в (14)  $\dot{\epsilon} = 7 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 10^8$  дин/см<sup>2</sup>, находим  $\eta = 400$  пауз. Если  $a = 0,5$  см,  $\dot{a} = 4,5 \cdot 10^5$  см/с,  $\rho = 4,0$  г/см<sup>3</sup>, то  $\frac{6\eta}{a\rho} = 3 \cdot 10^{-3}$ .

Поэтому справедливо

$$S_i = a\Delta a^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (15)$$

Выражение (15) можно записать так:

$$S_i = ka^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}, \quad (16)$$

где

$$k = \left( \frac{\Delta a}{a} \right)^2.$$

При выводе (16) было использовано условие высокой скорости фазового перехода. Поэтому, строго говоря, (16) справедливо для больших чисел Рейнольдса  $Re \gg 1$ . Однако скорость полиморфного перехода экспоненциально зависит от температуры и в верхней части оболочки, при температурах меньше  $1000^\circ\text{C}$ , может быть достаточно низкой. Поэтому полезно рассмотреть случай низкой скорости фазового превращения.

В случае малых чисел Рейнольдса диссипативный член (6) в выражении (7) следует заменить формулой Стокса. Тогда имеем

$$2\pi a^3 \rho \frac{du_i}{dt} = 2\pi \rho a^4 \dot{a}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2} - 6\pi \eta a u_i. \quad (17)$$

В интересующем нас случае решение (17) имеет вид

$$u_i = C e^{-\frac{3\eta t}{a^2 \rho}} + \frac{\rho \dot{a}^2 a^3}{3\eta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (18)$$

Постоянную  $C$  определяем из начальных условий, полагая в (18)  $u_i|_{t=0} = 0$ , находим

$$C = -\frac{\rho \dot{a}^2 a^3}{3\eta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (18) имеем

$$u_i = (1 - e^{-\frac{3\eta t}{a^2 \rho}}) \frac{\rho \dot{a}^2}{3\eta} a^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}. \quad (20)$$

На основании (20) находим выражение для смещения сферы за один полный цикл:

$$S_i = k_1 a^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}, \quad (21)$$

где

$$k_1 = \frac{2\rho \Delta a \dot{a}}{3\eta} \left( 1 - e^{-\frac{3\eta \Delta a}{2a^2 \rho \dot{a}}} \right).$$

Когда

$$e^{-\frac{3\eta \Delta a}{2a^2 \rho \dot{a}}} \ll 1,$$

смещение сферы определяется формулой (22)

$$S_i = k_2 a^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\cos \varphi_j}{l_{ij}^2}, \quad (22)$$
$$k_2 = \frac{2\rho \Delta a a'}{3\eta}.$$

Если  $Re > 2000$ , следует пользоваться (16), когда  $2000 > Re > 1$  — формулой (21), если  $Re < 1$  — формулой (22).

Изложенные выше результаты позволяют сделать вывод, что в случае периодических изменений температуры может иметь место процесс разделения оболочки на минералогические фракции при температурах более низких, чем температура плавления горных пород. Пульсирующие кристаллы выжимают горные массы вверх, в сторону низких давлений. Смещение происходит как путем медленного течения, так и толчками. Толчки возникают, когда напряжения превысят предел упругости горной породы. Каждый толчок фиксируется на поверхности планеты в виде сильного или слабого землетрясения в зависимости от того, какая масса, на какой глубине и с какой скоростью участвует в движении. С изложенных позиций землетрясения земного шара можно рассматривать как механическое выражение процесса разделения земной оболочки на минералогические фракции под действием сил Бьеркнеса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Birch F. Elasticity and constitution of the Earth's interior.—J. Geoph. Res., 1952, 57, N 2, p. 227—286. [2] Магницкий В. А. К вопросу о плотности и сжимаемости оболочки Земли.—Вопросы космогонии, 1952, 1, с. 15—33. [3] Авдулов М. В. Проблемы эволюции земной коры на примере Кавказа и Крыма. М., 1979, с. 78—79. [4] Vjerknes V. Hydrodynamisch Fernkraft. Leipzig, 1900, 300 p. [5] Воинов О. В., Головин А. М. Уравнение Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости.—Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа, 1970, № 3, с. 117—123. [6] Хирт Дж., Лоте Н. Теория дислокаций. М., 1972, с. 144—145. [7] Келли А., Гровс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. М., 1974, с. 257. [8] Бенъоф Х. Связь разрыва Уайт-Вульф с региональной тектонической картиной.—В кн.: Слабые землетрясения. М., 1961, с. 220—225. [9] Verhoogen J. Phase change and convection in the Earth's mantle.—Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 288, 1968, p. 276—283.

Поступила в редакцию  
02.01.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 3

УДК 536.750,53:519.25

#### АДМИТАНСНЫЕ ФУНКЦИИ И ТРЕХВРЕМЕННЫЕ МОМЕНТЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

Р. Л. Стратонович, А. В. Толстопятенко

(кафедра общей физики и волновых процессов)

1. Введение. Как известно [1—2], квадратичная флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ) позволяет находить третий трехвременной момент тепловых флуктуаций любых термодинамических параметров в произвольных системах, если известны соответствующие квад-