

жение амплитуды колебаний продолжается в том же направлении, пока за счет изменения фазы эффективный коэффициент модуляции не достигнет критической величины, а амплитуда колебаний — экстремально-го значения. Возникающие в системе осцилляции амплитуды и фазы колебаний затухают, поскольку изменение фазы в этом случае непрерывно происходит в направлении приведения эффективного коэффициента модуляции к критической величине.

Таким образом, экспериментальное исследование процессов возбуждения субгармонических колебаний в нелинейном контуре, отвечающем требованиям метода медленно меняющихся амплитуд, подтверждает их параметрическую природу. Параметрическое представление о природе субгармонических колебаний дает удовлетворительное объяснение всех особенностей механизма нестационарных процессов, возникающих при их возбуждении.

Автор выражает свою благодарность В. В. Мигулину за полезные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вахрамеев А. Н. Параметрическая природа субгармонических колебаний. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 2, с. 160—167. [2] Вахрамеев А. Н. Субгармонические колебания третьего порядка в контуре с малой нелинейностью. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1970, с. 168—173. [3] Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., 1966, 332 с. [4] Мигулин В. В. Параметрическая регенерация. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1960, № 6, с. 67—77.

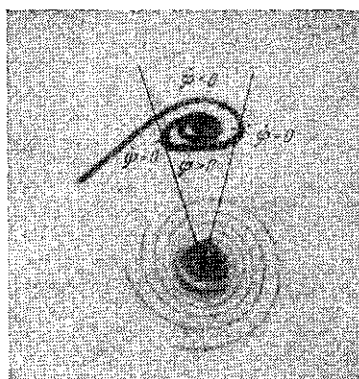


Рис. 3. Движение амплитуды и фазы вблизи стационарного состояния

Поступила в редакцию
01.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 3

УДК 537.611.44

СПЕКТР МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПСОИДА С ДОМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

С. А. Вызулин, С. А. Киров, Н. Е. Сырьев

(кафедра радиофизики СВЧ)

Спектр ферромагнитного резонанса сильно зависит от формы образца и его внутренней магнитной структуры. Для случая полей, достаточных для насыщения, спектр колебаний намагниченности в магнито-статическом (МС) приближении был впервые найден Уокером для изотропного сфероида, намагничиваемого вдоль оси вращения [1]. В литературе рассмотрены также случаи изотропного [2] и анизотропного [3] сферического образца и анизотропного эллипсоида, главные оси которого определенным образом ориентированы относительно равновесной намагниченности и кристаллографических осей [4]. Другие частные

случай и общее решение для произвольно намагничиваемого эллипсоида и сфероида не рассматривались из-за математических трудностей. При наличии в образце регулярной доменной структуры (ДС) спектр длинноволновых по сравнению с периодом ДС МС-колебаний был рассчитан для случая сферы в [5] на основе введения усредненного по ДС тензора магнитной восприимчивости. Формулировка такой задачи аналогична уокеровской, но учет ДС приводит к появлению дополнительных компонент в тензоре восприимчивости, что усложняет решение.

В связи с вышесказанным представляет большой интерес нахождение общего метода расчета спектра МС-колебаний для эллипсоида (а также сфероида и сферы) при тензоре восприимчивости произвольного вида. В настоящей работе предложен практически удобный метод решения данной задачи, и на его основании произведен расчет спектра для ранее не рассматривавшегося случая сфероида, намагничиваемого перпендикулярно оси вращения, как в области существования пластинчатой ДС, так и в области насыщения.

Метод расчета спектра. В линейном гармоническом приближении связь между переменной намагниченностью m и полем h внутри образца определяется тензором восприимчивости $\hat{\chi}$: $4\pi m = \hat{\chi}h$. При наличии в образце магнитной структуры (регулярной либо имеющей регулярный статистический характер — ДС, зерна поликристалла) под m , h и χ будем подразумевать величины, усредненные по областям, намного превышающим период регулярности структуры, но существенно меньшим пространственного периода колебаний. Тензор $\hat{\chi}$ обычно задается в базисе, связанном с направлением равновесной намагниченности и основными осями кристалла, так как при этом он имеет наиболее простой вид. Введем прямоугольный базис x, y, z , совпадающий с главными осями эллипсоида:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} + \frac{z_0^2}{C^2} = 1 \quad (1)$$

(индекс «0» указывает значения координат на поверхности образца). Обозначим через $\hat{\kappa}$ выражение тензора восприимчивости в базисе x, y, z : $\hat{\kappa} = D\hat{\chi}D$, где D — матрица преобразования координатных осей, в которых первоначально задан тензор χ , в базис x, y, z ; D — транспонированная матрица. В случае произвольной ориентации осей эллипсоида все компоненты $\hat{\kappa}$ могут быть отличны от нуля даже в области насыщения. Вводя МС-потенциал соотношением $h = \nabla\psi$, запишем уравнения магнитостатики для области внутри (i) и вне (e) образца:

$$(\nabla^2 + \nabla\hat{\kappa}\nabla)\psi^{(i)} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2\psi^{(e)} = 0. \quad (3)$$

На поверхности должны выполняться условия непрерывности потенциала и нормальной компоненты индукции:

$$\psi^{(i)} = \psi^{(e)}, \quad (4)$$

$$n_0(\nabla + \hat{\kappa}\nabla)\psi^{(i)} = n_0\nabla\psi^{(e)}, \quad (5)$$

где n_0 — нормаль к поверхности эллипсоида:

$$n_0 = \left\{ \frac{x_0}{A^2}; \frac{y_0}{B^2}; \frac{z_0}{C^2} \right\}. \quad (6)$$

Во всех предыдущих работах [1—5] решение для $\psi^{(i)}$ искалось в соответствующих геометрии образца криволинейных координатах ρ, θ, φ в виде разложения по функциям $Y_n^m(\theta, \varphi) R_n^m(\rho)/R_n^m(\rho_0)$, которые на поверхности образца $\rho=\rho_0$ сразу переходят в функции Y_n^m , выбранные для сшивания граничных условий. С уменьшением симметрии задачи такое выделение «радиального» множителя сильно усложняется и становится малоудобным (например, см. [4]). Запишем решение в декартовых координатах, поскольку в них дифференциальные операторы левых частей (2), (5) имеют простейший вид:

$$\psi_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{\substack{p,q,s \\ p+q+s=n-2k}} A_{pqs}^{(k)} x^p y^q z^s, \quad (7)$$

где n — первый уокеровский индекс колебаний, $E(k)$ — целая часть числа k . Граничные условия (4), (5) не «перемешивают» колебаний с разными n . Можно показать, что в связи с этим детерминант характеристической системы уравнений для коэффициентов $A_{pqs}^{(k)}$ распадается на произведение детерминантов, определяющих резонансные частоты групп колебаний с первыми индексами $n, n-2, n-4, \dots, n-2E(n/2)$. Поэтому при расчете спектра колебаний порядка n можно ограничиться рассмотрением в (7) лишь $N=(n+1)(n+2)/2$ коэффициентов $A_{pqs}^{(0)}$ с индексами $p+q+s=n$. Разумеется, для нахождения потенциалов этих колебаний нужно затем решить полную систему уравнений и найти все остальные коэффициенты с индексами $p+q+s=n-2, n-4, \dots, n-2E(n/2)$.

Запишем выражения для $\psi_n^{(e)}$. Предельный переход от нормального решения уравнения Лапласа для эллипсоида к случаям сфероида и сферы представляет определенные трудности, поэтому рассмотрим их отдельно.

Эллипсоид ($A \neq B \neq C$). Для облегчения последующего сшивания решение удобно представить в декартовых координатах [6]:

$$\psi_n^{(e)} = \sum_{m=1}^{2n+1} B_m G_{nm}(x, y, z) I_{nm}(\rho)/I_{nm}(C), \quad (8)$$

где G_{nm} — внутренние эллипсоидальные функции:

$$G_{nm} = \begin{Bmatrix} x & xy \\ 1 & y & xz & xyz \\ z & yz \end{Bmatrix} \prod_{i=1}^t \Theta_{ig}; \quad (9)$$

столбцы в скобках соответствуют четырем видам эллипсоидальных функций, которым отвечают значения $t=n/2, (n-1)/2, (n-2)/2, (n-3)/2$ соответственно;

$$\Theta_{ig} = \frac{x^2}{A^2 + \Theta_{ig}} + \frac{y^2}{B^2 + \Theta_{ig}} + \frac{z^2}{C^2 + \Theta_{ig}} - 1,$$

где Θ_{ig} — корни характеристической системы уравнений для эллипсоидальных функций:

$$\frac{k_1}{A^2 + \Theta_i} + \frac{k_2}{B^2 + \Theta_i} + \frac{k_3}{C^2 + \Theta_i} + 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t \frac{1}{\Theta_i - \Theta_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

В соответствии с (9) тройка чисел (k_1, k_2, k_3) принимает следующие значения:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 311 & 331 & \\ 111 & 131 & 113 \\ & 113 & 133 \end{array} \right\}.$$

Функция I_{nm} записывается в виде

$$I_{nm}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{x'y'R_{nm}^2},$$

где

$$R_{nm}(\rho) = \left\{ \begin{array}{ccc} x' & x'y' & \\ y' & x'z' & x'y'z' \\ z' & y'z' & \end{array} \right\} \prod_{i=1}^i (\rho^2 - \vartheta_{ig} - C^2),$$

ρ — «радиальная» эллипсоидальная координата ($\rho=C$ на поверхности эллипсоида), x', y', z' — «радиальные» части от соответствующих декартовых координат:

$$x' = \sqrt{\rho^2 + A^2 - C^2}, \quad y' = \sqrt{\rho^2 + B^2 - C^2}, \quad z' = \rho.$$

Сфероид ($A=B>C$). Вводя сфероидальные координаты соотношениями

$$x = \sqrt{A^2 - C^2} \sqrt{1 + \xi^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sqrt{A^2 - C^2} \sqrt{1 + \xi^2} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z' = \sqrt{A^2 - C^2} \xi \cos \vartheta,$$

имеем

$$\psi_n^{(e)} = \sum_{m=-n}^n B_m Y_n^m(\vartheta, \varphi) Q_n^{[m]}(i\xi)/Q_n^{[m]}(i\xi_0), \quad (10)$$

где $\xi_0 = 1/\sqrt{A(C^2 - 1)}$ — значение ξ на поверхности сфероида, $Q_n^{[m]}$ — присоединенный полином Лежандра второго рода, Y_n^m — сферическая функция.

Сфера ($A=B=C$). В сферических координатах r, ϑ, φ ($x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta$) общее решение имеет вид

$$\psi_n^{(e)} = \left(\frac{A}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n B_m Y_n^m(\vartheta, \varphi). \quad (11)$$

Рассмотрим граничные условия. Для сшивания решений нужно представить левые и правые части (4), (5) в виде разложения по одной системе функций, в качестве которых удобно взять функции вида

$$x_0^p y_0^q z_0^s, \quad p + q + s = n, \quad n = 2, \dots, n - 2E \left(\frac{n}{2} \right). \quad (12)$$

Эти функции линейно-зависимы в силу (1), но из них всегда можно выбрать N линейно-независимых функций, в том числе $2n+1$ степени n , для которых и достаточно обеспечить сшивание при определении спектра. На поверхности образца потенциалы (7), (8) уже представлены через слагаемые вида (12). Потенциалы (10), (11) также легко выразить через функции (12), используя известные выражения Y_n^m че-

рез тригонометрические функции и учитывая, что $x_0 = A \sin \theta \cos \varphi$, $y = B \sin \theta \sin \varphi$, $z_0 = C \cos \theta$. Не зависящее от $\hat{\kappa}$ граничное условие (4) определяет $2n+1$ коэффициентов B_m через $A_{pqs}^{(k)}$. Подставляя выражения B_m в (3) и сшивая коэффициенты при слагаемых степени n , получаем $2n+1$ линейных уравнений для N коэффициентов $A_{pqs}^{(0)}$. Остальные $n(n-1)/2$ уравнений следуют из подстановки решения (7) в (2). Резонансные частоты определяются условием обращения в нуль детерминанта этой системы N уравнений.

Рассмотрим расчет спектра для сфероида ($A=B>C$) с двухфазной пластинчатой ДС, намагничиваемого полем $\mathbf{H}_0$ перпендикулярно оси вращения z . Пусть $\mathbf{H}_0 \parallel x$. В данных координатных осях усредненный по ДС тензор восприимчивости имеет следующий вид, если доменные границы (ДГ) перпендикулярны или параллельны полю $\mathbf{H}_0$ [5]:

$$\hat{\kappa} = \begin{pmatrix} \chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1 & -ik \\ 0 & ik & \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для $\hat{\kappa}$ указанного вида операторы граничного условия (5) при действии на $x^p y^q z^s$ сохраняют не только значение $p+q+s$, но и $q+s$. Поэтому колебания порядка n распадаются на две независимые группы с разной четностью $q+s$ в разложении потенциала (7). Пропуская простейший случай однородных колебаний ($n=1$), рассматривавшихся в [7], приведем результаты для $n=2$:

а) $n=2$, $q+s$ — нечетное. Колебания типа $(2, \pm 1)$ в уокеровских обозначениях.

$$\psi^{(i)} = A_1 xy + A_2 xz;$$

$$\begin{cases} (\mu_1 + \mu_3 - \alpha^2 F_{22}) A_1 - ik A_2 = 0, \\ ik A_1 + (\mu_2 + \mu_3 / \alpha^2 - F_{21}) A_2 = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\alpha = A/C, \mu_i = 1 + \chi_i, F_{nm} = \frac{\xi_0}{Q_n^{(m)}(i\xi_0)} \left[\frac{dQ_n^{(m)}(i\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_0}.$$

б) $n=2$, $q+s$ — четное. Колебания типа $(2, 0)$, $(2, \pm 2)$.

$$\psi^{(i)} = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + A_4 yz + A_5;$$

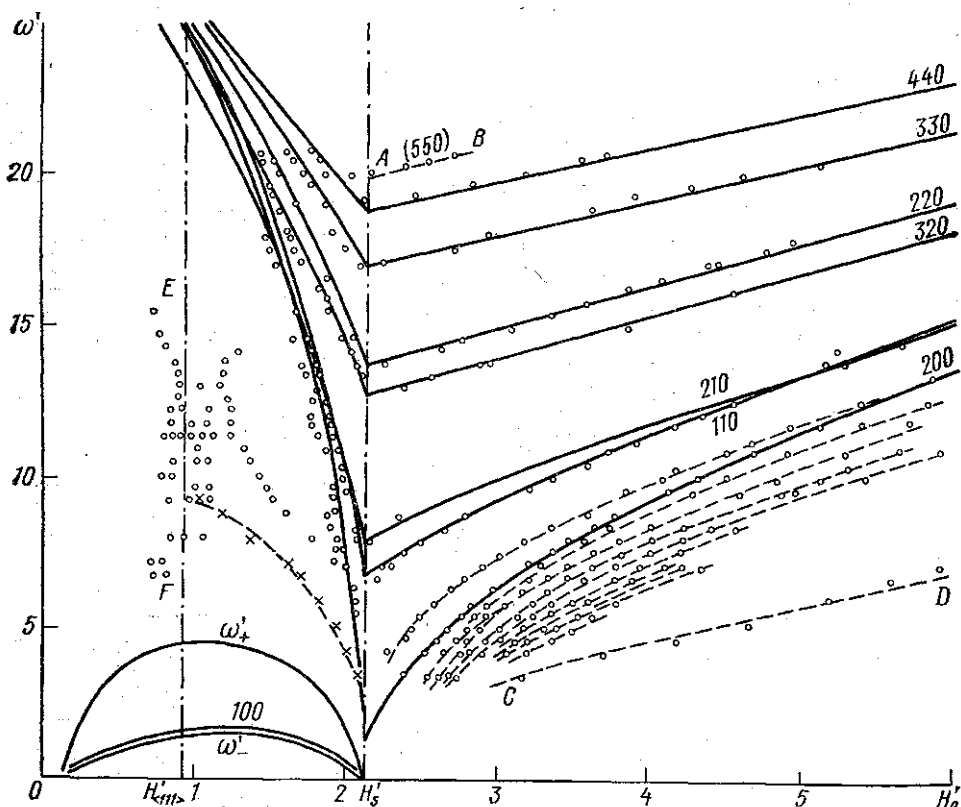
$$\begin{cases} (\alpha^2 F_{22} - 2\mu_3) A_1 + (2\mu_1 - \alpha^2 F_{22}) A_2 - ik A_4 = 0, \\ \left[\frac{\alpha^2}{2} (F_{22} - F_{20}) - 2\mu_3 \right] A_1 + \frac{\alpha^2}{2} (F_{20} - F_{22}) A_2 + (2\mu_3 - F_{20}) A_3 + ik A_4 = 0, \\ 2ik A_2 - \frac{2ik}{\alpha^2} A_3 + \left(\frac{\mu_1}{\alpha^2} + \mu_2 - F_{21} \right) A_4 = 0, \\ \mu_3 A_1 + \mu_1 A_2 + \mu_2 A_3 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Разложение краевой задачи в данном случае произведено по функциям:

а) $x_0 y_0$, $x_0 z_0$; б) y_0^2 , z_0^2 , $y_0 z_0$.

Данные уравнения справедливы и в области насыщения, если в них положить $\chi_3 = 0$. Легко найти характеристические системы уравнений и для других типов колебаний. Аналогично получаются уравнения и для общего случая произвольного эллипсоидального образца.

Экспериментальные зависимости резонансных частот от поля в нормированных единицах $\omega' = \omega / |\gamma K_1 / M_0|$, $H_0' = H_0 / |K_1 / M_0|$ представлены на рисунке. Отметим особенности спектров поглощения. В области насыщения при уменьшении поля начиная с некоторого зависящего от ω граничного значения возникает большое число пиков поглощения, интенсивность которых растет с приближением к полю однородного ре-



ДС

зонанса H_{110} . В полях $H_0 < H_{110}$ картина спектра качественно иная: количество пиков мало, они разделены широкими интервалами и имеют небольшую интенсивность, быстро спадающую с удалением от H_{110} . Спектры аналогичного вида наблюдались также в [9] на касательно намагничиваемых прямоугольных пластинках ИЖГ. В доменной области также обнаружено возбуждение большого числа резонансов. Как правило, ширина их пиков быстро растет, а интенсивность падает с удалением от H_s в связи с ростом затухания в малых полях. Во многих случаях наблюдается слияние большого числа близких по полю резонансов в широкие интегральные кривые поглощения сложного вида, что затрудняет их отнесение к отдельным резонансным ветвям. В поле $H_{(111)} = \sqrt{2/3} 4\pi M_0 N_t = 0,915$, соответствующем нижней границе устойчивости пластинчатой двухфазной ДС [10], наблюдается поглощение в широком частотном интервале (ветвь EF), что подтверждает факт перестройки ДС.

Расчет спектра сфероида был произведен как для насыщающих полей, так и в доменной области, исходя из указанных выше параметров ИЖГ. Необходимые для этого выражения компонент тензора восприимчивости (13) были взяты из [5]. Резонансные частоты определялись путем численного расчета корней детерминантов характеристических систем уравнений, полученных в соответствии с описанным выше методом (например, для колебаний с $n=2$ уравнений (14), (15)). В соответствии с результатами непосредственного наблюдения доменов в дисках ИЖГ [11] предполагалось, что в интервале полей $H_{(111)} < H_0 < H_s$ в образце существует пластинчатая доменная структура с границами доменов, перпендикулярными к H_0 . Колебания границ при расчете не учитывались. Для отношения осей сфероида $\alpha = 27,3$ расчет дал хорошее согласие с экспериментом для однородного колебания (110), в том числе и в доменной области, что подтверждает правильность использованной модели ДС. Однако при этом рассчитанные ветви неоднородных колебаний лежат в более узком частотном интервале, чем экспериментальные. Очевидно, что чем больше индексы колебаний и соответственно меньше их пространственный период, тем значительнее должно быть рассогласование теории и эксперимента за счет несфероидальности образца. Следуя [12] (где рассматривались спектры нормально намагничиваемых дисков), была сделана попытка скомпенсировать это обстоятельство подбором отношения осей α для сфероида, аппроксимирующего диск. Полученная зависимость α от первого индекса колебаний n имеет следующий вид:

n	1	2	3	4
α	27,3	12	10	9

Результаты расчета спектра с учетом этой зависимости показаны на рисунке. Из низкочастотных «продольных» МС-колебаний, частоты которых лежат в интервале $\omega_- < \omega < \omega_+$, показана только ветвь однородного колебания (100). В настоящей работе возбуждение этих колебаний наблюдать не удалось, так как их частоты лежат ниже рабочего диапазона экспериментальной установки.

Как видно из рисунка, во всем диапазоне полей, в том числе и в доменной области, получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных резонансных частот для колебаний (110), (220), (330), (440), (200), (320). Часть других резонансных ветвей, по-видимому, принадлежит колебаниям с $n > 4$, для которых расчет не производился. Например, по аналогии с положением ветвей колебаний типа $(nn0)$ с $n =$

=1, 2, 3, 4 видно, что ветвь AB должна соответствовать колебанию (550). В то же время даже в области насыщения имеется большое число ветвей, лежащих ниже частот спектра сфероида. На рисунке показаны ветви только некоторых наиболее интенсивных из этих колебаний, а также нижняя экспериментальная граница их частот — линия CD . Таким образом, расчет на основании аппроксимации диска сфероидом не позволяет получить полного объяснения экспериментальных спектров, что, по-видимому, будет возможно только при точном учете формы образца. Расчет такого рода для простейшего случая касательно намагничиваемых прямоугольных тонких пленок [9], действительно, позволил дать объяснение низкочастотной части экспериментально наблюдавшихся спектров, однако распространение этого расчета на случай касательно намагничиваемого анизотропного диска представляет определенные математические затруднения. Возможно, что в доменной области для интерпретации низкочастотной части спектра будет также необходим учет колебаний границ доменов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Walker L. R. Magnetostatic modes in ferromagnetic resonance.— *Phys. Rev.*, 1957, **105**, p. 390—399. [2] Fletcher P. C., Bell R. O. Ferrimagnetic resonance modes in spheres.— *J. Appl. Phys.*, 1959, **30**, p. 687—698. [3] Кривченков В. Д., Пильщиков А. И. Магнитостатические типы прецессии в анизотропной сфере.— *ЖЭТФ*, 1962, **43**, 573—579. [4] Лаунец В. Л., Новицкас М. М., Шугуров В. К. Магнитостатические колебания ферритового эллипсоида с учетом кристаллографической анизотропии.— *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, 1971, **14**, с. 933—938. [5] Киров С. А., Пильщиков А. И., Сырьев Н. Е. Магнитостатические типы колебаний в образце с доменной структурой.— *ФТТ*, 1974, **16**, с. 3051—3056. [6] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952, с. 434—468. [7] Arltman J. Microwave resonance relations in anisotropic single-crystal ferrites.— *Phys. Rev.*, 1957, **105**, p. 62—72. [8] Дудкин В. И., Пильщиков А. И. Ферромагнитный резонанс при наличии доменной структуры.— *ФТТ*, 1966, **8**, с. 2182—2187. [9] Cracknell A. P., Storey B. E., Tooke A. O. Calculations magnetostatic mode frequencies in a 70 μ m-thick of YIG.— *Solid State Comm.*, 1978, **26**, p. 377—379. [10] Киров С. А., Лебедева Е. В. Устойчивость пластинчатой доменной структуры в кубическом ферромагнетике, намагничиваемом вдоль $\langle 110 \rangle$.— *ФТТ*, 1978, **20**, с. 1042—1044. [11] Мыкитюк В. И., Соломко А. А. Исследование доменной структуры иттриевого феррита-граната с помощью лазерного излучения.— *ФТТ*, 1971, **13**, с. 1545—1549. [12] Dillon J. F. Magnetostatic modes in disks and rods.— *J. Appl. Phys.*, 1960, **31**, p. 1605—1614.

Поступила в редакцию
06.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 3

УДК 539.043:548.4:620.187

ЭЛЕКТРОННО-МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В NaCl

Ю. В. Быков, В. Г. Бабаев, М. Б. Гусева

(кафедра электроники)

В работах [1, 2] был обнаружен эффект ориентированной кристаллизации на облучаемой ионами аргона поверхности кристалла NaCl в интервале температур 150—180°C независимо от природы конденсата. Корреляция этого явления с резким изменением концентрации точек-