

УДК 621.072.621.373

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МНОГОКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Г. П. Минина

(кафедра физики колебаний)

Исследование сложных автоколебательных систем со многими степенями свободы представляет собой весьма громоздкую задачу. Обычный метод расчета многоконтурных автоколебательных систем состоит в решении системы дифференциальных уравнений, порядок которой определяется числом степеней свободы [1, 2]. Увеличение числа степеней свободы приводит к резкому усложнению математических выкладок, так как этот метод описания системы не приводит к явным рекуррентным соотношениям, по которым можно выписать уравнения частотной и амплитудных кривых генератора с произвольным числом контуров и тем более условия устойчивости стационарных режимов генератора.

Для автоколебательной системы, содержащей один слабонелинейный активный элемент, эту задачу можно решить проще. Представим автоколебательную систему как контур, содержащий нелинейный активный элемент, связанный с линейной колебательной системой. Отклик этой системы на внешнее воздействие может быть записан в виде линейного интегрального оператора $\hat{\Delta}$ с разностным ядром. В этом случае многоконтурный генератор описывается уравнением

$$\frac{1}{v_i^2} \ddot{x}(t) + x(t) + \mu f(x(t), \dot{x}(t)) + k_1^2 \hat{\Delta} x(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь v_i — парциальная частота генераторного контура, $\mu f(x, \dot{x})$ — характеристика нелинейного элемента, k_1^2 — коэффициент связи между генераторным контуром и линейной резонансной системой.

Ограничимся случаем одночастотного режима генерации и будем решать уравнение методом гармонического баланса. При этом получаем два уравнения, из которых можно найти частоту и амплитуду автоколебаний.

$$-\eta + \xi_1 + k_1^2 \operatorname{Re} \Delta(\eta) = -\frac{\mu}{\omega^2 a \pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t) \sin \omega t \cdot d(\omega t) \equiv -P(a), \quad (2)$$

$$k_1^2 \operatorname{Im} \Delta(\eta) = -\frac{\mu}{\omega^2 a \pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t) \cos \omega t \cdot d(\omega t) \equiv -Q(a).$$

Здесь и далее $\eta = (\omega^2 - v_n^2)/v_n^2$, $\xi_i = (v_i^2 - v_n^2)/v_n^2$ — расстройки частоты автоколебаний ω и парциальных частот контуров v_i относительно парциальной частоты одного из контуров, a — стационарная амплитуда колебаний в генераторном контуре, $\Delta(\eta)$ — экспоненциальное фурье-преобразование ядра интегрального оператора $\hat{\Delta}$, непосредственно свя-

занное с экспериментально измеряемым импедансом линейной системы. В случае последовательно соединенных колебательных контуров $\Delta(\eta)$ имеет вид конечной цепной дроби:

$$\Delta(\eta) = \frac{1}{\eta - \xi_2 - i\delta_2 - \frac{k_2^2}{\eta - \xi_3 - i\delta_3 - \frac{k_3^2}{\eta - \xi_4 - i\delta_4 - \dots - \frac{k_{n-1}^2}{\eta - i\delta_n}}}}, \quad (3)$$

где k_i^2 — коэффициент связи между i -м и следующим за ним контуром, $\delta_i = 1/Q_i$ — величины, обратные добротностям контуров.

Для практической реализации тех или иных режимов работы генератора необходимо исследовать устойчивость колебаний в системе. Условия устойчивости можно получить, анализируя развитие со временем малого возмущения стационарного решения уравнения (1). Уравнение для малой добавки x_1 к стационарному решению можно линеаризовать:

$$\frac{1}{v_1^2} \ddot{x}_1 + x_1 + k_1^2 \hat{\Delta} x_1 = -\mu \left[\frac{\partial f(x_0(t), \dot{x}_0(t))}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(x_0(t), \dot{x}_0(t))}{\partial \dot{x}} \dot{x}_1 \right].$$

В нелинейные члены в правой части этого уравнения необходимо подставить стационарное решение уравнения (1), при этом наибольший вклад в $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ вносят нулевые и вторые гармоники основного сигнала. Если рассматривать медленные возмущения, то в уравнении необходимо оставить только частоты, близкие к частоте автоколебаний. Поэтому решение можно искать в виде

$$x_1 = \alpha e^{i\omega t + \frac{\lambda\omega t}{2}} + \beta e^{-i\omega t + \frac{\lambda\omega t}{2}}.$$

Поскольку мы используем относительные расстройки частот, λ выбрано безразмерной величиной; множитель $1/2$ введен из соображений удобства.

Приравнявая нулю коэффициенты при различных экспонентах, получаем систему двух однородных уравнений для определения α и β . Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем уравнение для определения λ :

$$\begin{aligned} & [-k_1^2 \Delta(\eta) + k_1^2 \Delta(\eta - i\lambda) + i\lambda] [-k_1^2 \Delta^*(\eta) + k_1^2 \Delta^*(\eta + i\lambda) - i\lambda] + \\ & + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} (P + iQ) [-k_1^2 \Delta^*(\eta) + k_1^2 \Delta^*(\eta + i\lambda) - i\lambda] + \\ & + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} (P - iQ) [-k_1^2 \Delta(\eta) + k_1^2 \Delta(\eta - i\lambda) + i\lambda] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Традиционно уравнение для нахождения λ получают методом Ляпунова в виде алгебраического уравнения по степеням λ . Можно показать, что уравнение (4) эквивалентно такому алгебраическому уравнению, из коэффициентов которого, пользуясь условием Рауса — Гурвица, можно получить $2n-1$ критериев устойчивости, где n — число степеней свободы системы [3].

Условия устойчивости сложным образом выражаются через параметры системы, и их исследование требует машинного расчета [1, 2]. Однако во многих реальных случаях можно сделать допущения о различных порядках малости членов уравнения и упростить условия устойчивости. Большим преимуществом предлагаемой схемы расчета устойчивости является то, что в уравнении для λ (4) все члены имеют определенный физический смысл и сгруппированы так, что можно пренебречь отдельными из них в самом уравнении, минуя утомительные процедуры выписывания коэффициентов при λ и составления из них достаточно сложных определителей.

Например, в случае большого запаса регенерации, когда в системе нет гашения автоколебаний, а возможен лишь перескок частоты колебаний с одной ветви частотной кривой на другую, можно пренебречь первым членом в уравнении (4). Если характеристику нелинейного активного элемента можно аппроксимировать неполным кубическим полиномом $\mu f(x, \dot{x}) = (\delta_0 + \delta_{12} x^2) \dot{x}$, то при большом запаса регенерации ($\delta_0 \gg k_1^2/\delta_2$) уравнение для λ запишется в виде:

$$2\lambda + i k_1^2 [\Delta(\eta + i\lambda) - \Delta(\eta - i\lambda) + \Delta(\eta) - \Delta^*(\eta)] = 0. \quad (5)$$

Легко показать, что число условий устойчивости уменьшилось на единицу.

Рассмотрим более подробно уравнение (5). Известно, что граница устойчивости определяется тем, что действительная часть одного из корней λ обращается в нуль, т. е. λ становится чисто мнимым. Комплексное уравнение (5) можно рассматривать как систему двух уравнений для мнимой и действительной части λ при фиксированных параметрах системы, в частности k_1^2 . С другой стороны, в той же самой системе переменными можно считать мнимую часть λ и k_1^2 при фиксированной действительной части λ . Если $\text{Re}(\lambda)$ мы выбираем равной нулю, то найденное значение связи генераторного контура с линейной системой k_1^2 будет определять границу устойчивости колебаний. Обозначим $\lambda = i\rho$, где ρ — действительное число. Выписав действительную и мнимую части уравнения (5), получаем

$$2\rho = k_1^2 [\text{Re} \Delta(\eta + \rho) - \text{Re} \Delta(\eta - \rho)], \quad (6a)$$

$$2\text{Im} \Delta(\eta) = \text{Im} \Delta(\eta + \rho) + \text{Im} \Delta(\eta - \rho). \quad (6b)$$

Рассмотрим получение критериев устойчивости на примере трехконтурной системы стабилизации частоты, в которой линейная система состоит из двух последовательно соединенных контуров. Их добротность может отличаться на несколько порядков ($Q_3/Q_2 > 10^2$). Такие системы позволяют создавать высокостабильные генераторы СВЧ-колебаний [4].

Можно показать, что для систем стабилизации частоты импеданс $\Delta(\eta)$ (см. (3)) представим в виде:

$$\text{Re} \Delta(\eta) = \frac{\eta - \xi_2}{(\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2} + \frac{k_2^2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} \left[\cos 2\varphi \frac{\eta'}{\eta'^2 + \delta'^2} + \sin 2\varphi \frac{\delta'}{\eta'^2 + \delta'^2} \right], \quad (7a)$$

$$\text{Im} \Delta(\eta) = \frac{\delta_2}{(\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2} + \frac{k_2^2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} \left[\cos 2\varphi \frac{\delta'}{\eta'^2 + \delta'^2} - \sin 2\varphi \frac{\eta'}{\eta'^2 + \delta'^2} \right], \quad (7b)$$

где введены обозначения:

$$\eta' = \eta + \frac{k_1^2 \xi_2}{\xi_2^2 + \delta_2^2}; \quad \delta' = \delta_3 + \frac{k_2^2 \delta_2}{\xi_2^2 + \delta_2^2}.$$

Углом φ обозначен фазовый сдвиг между колебаниями в первом и третьем контурах, причем

$$\sin 2\varphi = \frac{2\xi_2\delta_2}{\xi_2^2 + \delta_2^2}; \quad \cos 2\varphi = \frac{\xi_2^2 - \delta_2^2}{\xi_2^2 + \delta_2^2}.$$

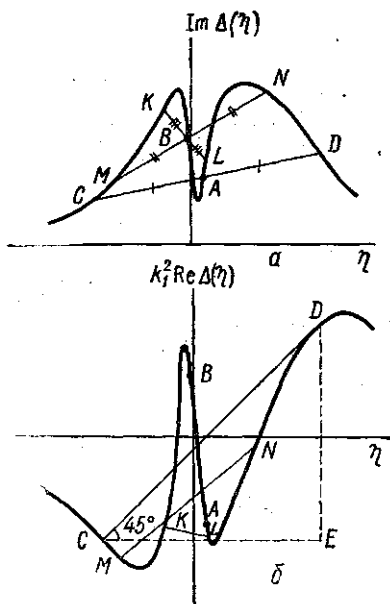
Представление $\Delta(\eta)$ в таком виде удобно и для рассмотрения частотной и амплитудной кривых, так как

$$\eta - \xi_1 = k_1^2 \operatorname{Re} \Delta(\eta), \quad (8a)$$

$$|\delta_0| - \frac{\delta_1 a^2}{4} = k_1^2 \operatorname{Im} \Delta(\eta). \quad (8б)$$

Первые члены соотношений (7) описывают боковые ветви частотной и амплитудной кривых, а два последних — среднюю ветвь.

Исследуем сначала условия «срыва колебаний» со средней ветви. Выберем на средней ветви точку, соответствующую интересующему нас значению η (например, точку A на рисунке, а), и будем искать величину связи k_1^2 , при которой нарушается устойчивость стационарного режима в этой точке. Из рисунка, а следует, что геометрическое решение уравнения (7б) сводится к нахождению прямой, секущей амплитудную кривую так, что отрезки CA и DA равны. Из геометрии видно, что это эквивалентно тому, что $\operatorname{Im} \Delta(\eta) = (\operatorname{Im} \Delta(\eta + \rho) + \operatorname{Im} \Delta(\eta - \rho))/2$ и абсциссы точек C и D дадут значения $\eta - \rho$ и $\eta + \rho$. Найденные значения $\eta - \rho$ и $\eta + \rho$ перенесем на кривую $k_1^2 \operatorname{Re} \Delta(\eta)$ (рисунок, б). Из уравнения (6б) видно, что точка A находится на границе устойчивости



при таком $k_1^2_{кр}$, когда величины отрезков DE и CE равны, при этом отрезок CE имеет наклон к оси абсцисс 45° . Определим, со стороны каких значений от полученной величины $k_1^2_{кр}$ находится область устойчивых автоколебаний. Известно, что при $k_1^2 = 0$ частотная кривая представляет собой прямую линию частоты свободного генератора и устойчива всюду. При увеличении k_1^2 петли затягивания увеличиваются, частотная кривая из однозначной превращается в многозначную. Поскольку уравнение (6б) линейно по k_1^2 , то существует только одна точка смены знака устойчивости; поэтому всюду в области $k_1^2 < k_1^2_{кр}$ стационарные колебания с данной частотой η устойчивы. Из рисунка видно, что рассматриваемая точка (например, B) может быть неустойчива по нескольким критериям сразу. Неустойчивость по одному критерию может наступить при меньших значениях k_1^2 , чем по другому.

Геометрическая интерпретация уравнения устойчивости весьма полезна для оценки малости тех или иных членов в выражениях для $\Delta(\eta)$, $\Delta(\eta-\rho)$, $\Delta(\eta+\rho)$.

Так, если мы рассматриваем устойчивость точек на средней ветви (при этом $\eta \sim \delta_3$), легко видеть, что возможно два диапазона для ρ : $\rho \sim \delta_3$ и $\rho \sim \delta_2$. При этом в первом случае в выражениях для ρ следует рассматривать лишь два последних члена выражений (7), а первый член вносит лишь постоянный сдвиг. В случае же $\rho \sim \delta_2$ в $\Delta(\eta \pm \rho)$ следует, наоборот, оставлять только первый член.

По такой схеме легко получить условия устойчивости на средней и боковых ветвях частотной кривой для системы стабилизации частоты.

А. Условия устойчивости на средней ветви.

1. Критерий «вертикальных касательных» (фазовое условие устойчивости):

$$k_1^2 < \frac{\xi_2^2 + \delta_2^2}{k_2^2} \frac{(\eta'^2 + \delta'^2)^2}{\cos 2\varphi (\delta'^2 - \eta'^2) - 2 \sin 2\varphi \eta' \delta'}.$$

2.

$$k_1^2 < \frac{\xi_2^2 + \delta_2^2}{k_2^2} \frac{2\delta (\eta'^2 + \delta'^2)}{\cos 2\varphi \delta' - \sin 2\varphi \delta'}.$$

Этот критерий имеет смысл при больших расстройках $\xi_2 > \delta_2$, в противном случае он выполняется автоматически.

3.

$$k_1^2 < \frac{4\xi_2^2}{1 + \sqrt{1 + 4\xi_2^2 C - 4\xi_2^2 \delta_2^2 C^2}} + \frac{2}{C}.$$

где

$$C = \frac{2}{\delta_2} \left[\frac{\delta_2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} + \frac{k_2^2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} \left(\cos 2\varphi \frac{\delta'}{\eta'^2 + \delta'^2} - \sin 2\varphi \frac{\eta'}{\eta'^2 + \delta'^2} \right) \right].$$

Этот критерий в точке синхронизма $\eta = \xi_1 = \xi_2 = 0$ совпадает с «энергетическим» критерием [1].

Четвертое условие устойчивости всегда слабее третьего, поэтому мы его не приводим.

Б. Условия устойчивости на боковых ветвях.

1. Критерий «вертикальных касательных»:

$$k_1^2 < \frac{[(\xi_2 - \eta)^2 + \delta_2^2]^2}{\delta_2^2 - (\xi_2 - \eta)^2}.$$

2.

$$k_2^2 < 2[(\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2].$$

Этот критерий не зависит от параметров третьего контура.

3, 4.

$$k_1^2 < \frac{2\eta}{\frac{2\eta - \xi_2}{(2\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2} + \frac{\xi_2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} \frac{k_2^2}{\xi_2^2 + \delta_2^2} \left(\frac{\cos 2\varphi \cdot \rho' + \sin 2\varphi \cdot \delta'}{\rho'^2 + \delta'^2} \right)},$$

где

$$\rho_{1,2} = \frac{-\sin 2\varphi \pm \sqrt{\sin^2 2\varphi - 4A^2\delta'^2 + 4A \cos 2\varphi\delta'}}{2A},$$

$$A = \frac{\xi_2^2 + \delta_2^2}{k_2^2} \delta_2 \left(\frac{2}{(\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2} - \frac{1}{\xi_2^2 + \delta_2^2} - \frac{1}{(2\eta - \xi_2)^2 + \delta_2^2} \right).$$

Заметим, что эти критерии могут иметь смысл не при каждом A .

Полученные условия устойчивости сравнительно компактны, и легко исследовать их зависимость от параметров системы.

Таким же способом легко получить условия устойчивости генератора с запаздыванием или с распределенной линейной системой.

Автор выражает благодарность И. И. Минаковой за постановку задачи и плодотворное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Курдюмов О. А., Минакова И. И. Стабилизация частоты генераторов СВЧ с трехрезонаторной системой.—Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1968, 11, № 1, с. 41—48. [2] Минакова И. И., Минина Г. П., Назаров В. И., Панов В. И., Попельнюк В. Д. Стабилизация частоты генератора при больших добротностях стабилизирующего резонатора.—Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 6, с. 722—727. [3] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966. [4] Брагинский В. Б., Минакова И. И., Панов В. И. Перспективы создания высокостабильных СВЧ-генераторов с узкой естественной шириной линии.—Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 1, с. 192—194.

Поступила в редакцию
03.07.79