ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 537.312.62

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

Ф. Ф. Терновский

(кафедра квантовой теории)

1. Рассмотрим сверхпроводник (второго рода), находящийся во внешнем поле и (или) несущий транспортный ток.

Согласно теории Гинзбурга—Ландау (ГЛ) (см., например, [1]), свободная энергия системы в целом, т. е. сверхпроводника и окружающего его магнитного поля, равна

$$F = F_{n0} + \frac{1}{8\pi}\int H_e^2 dV_e +$$
$$+ \int \left[a|\psi|^2 + \frac{1}{2} b|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right] dV_s,$$

где интегрирование по dV_s ведется по объему сверхпроводника, а интеграл по dV_e берется по всему внешнему пространству, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ — магнитное поле внутри сверхпроводника, $\mathbf{H}_e = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_e$ — магнитное поле снаружи, ψ — волновая функция теории ГЛ. В дальнейшем мы будем предполагать, что из-за возможного наличия макроскопических неоднородностей или механических напряжений параметры a, b и m являются функциями координат.

Положив $\psi = (|a|/b)^{1/2} f \exp(2\pi i\theta)$, где $2\pi\theta$ — фаза волновой функции ψ, получим

$$F = F_{n0} - \frac{1}{8\pi}\int H_c^2 dV_s + F' + F'',$$

$$F' = \frac{1}{4\pi}\int H_c^2 \left[\frac{1}{2}(1-f^2)^2 + \xi^2 \frac{b}{|a|}\left(\nabla f \sqrt{\frac{|a|}{b}}\right)^2\right] dV_s, \quad (1)$$

$$F'' = \frac{1}{8\pi}\int [H^2 + \lambda^{-2} f^2 (\varphi_0 \nabla\theta - \mathbf{A})^2]\, dV_s + \frac{1}{8\pi}\int H_e^2 dV_e, \quad (2)$$

где $\varphi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант потока, H_c — термодинамическое критическое поле, ξ — длина когерентности и λ — глубина проникновения слабого магнитного поля. Все эти величины стандартным образом (см. [1]) выражаются через параметры a, b и m.

Термодинамическим потенциалом, который имеет при равновесии минимум по отношению к изотермическим изменениям состояния, происходящим при фиксированных токах в источниках внешнего поля* ($j_e = \mathrm{const}$) и в образце ($J = \mathrm{const}$), является, как известно, [2, 3], не свободная энергия, а потенциал Гиббса

$$G = F - \frac{1}{c}\int \mathbf{A}_e \mathbf{j}_e dV_e - \frac{\varphi_0}{c} J[\theta]. \quad (3)$$

---

* Мы предполагаем, что внешнее поле создается токами (с плотностью $\mathbf{j}_e$), текущими в проводниках, находящихся в нормальном состоянии. Фиксация полного тока в таком проводнике означает одновременно фиксацию $\mathbf{j}_e$.

Здесь $2\pi[\theta]$ — изменение фазы волновой функции теории ГЛ (т. е. фазы потенциала спаривания) вдоль произвольной линии γ, соединяющей внутри сверхпроводника точки его подключения к источнику тока*:

$$[\theta] = \int_{\gamma} \nabla\theta d\mathbf{l}. \tag{4}$$

2. Минимизируя потенциал Гиббса (3) относительно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_e$, получим уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \lambda^{-2} f^2 (\varphi_0 \nabla\theta - \mathbf{A}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_e = 4\pi c^{-1} \mathbf{j}_e \tag{5}$$

и условие непрерывности тангенциальных составляющих магнитного поля на границе сверхпроводника

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{et}. \tag{6}$$

Первое из уравнений (5) есть одно из уравнений ГЛ. Другое уравнение ГЛ можно получить, минимизируя G по f (оно нам в дальнейшем не понадобится). Наконец, минимизация относительно θ дает [4]:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H}, d\mathbf{l}_k] = 0 \tag{7}$$

вдоль осевых линий вихревых нитей ($d\mathbf{l}_k$ — элемент длины осевой линии $\widetilde{\Gamma}_k$ вихревой нити с номером k) и, кроме того, граничные условия

$$\varphi_0 \frac{\partial\theta}{\partial n} - A_n = 0 \tag{8а}$$

на внешней поверхности сверхпроводника и

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = 4\pi c^{-1} J, \tag{8б}$$

где интегрирование ведется по любой поверхности S, через которую протекает полный транспортный ток.

Совокупность полученных условий мы будем в дальнейшем называть условиями локального равновесия. При наличии в сверхпроводнике вихревых нитей совокупность этих условий не определяет состояние сверхпроводника однозначно: существует множество локально равновесных состояний, совместимых с заданными внешними условиями (температура, j_e, J). В результате флуктуаций или внешних воздействий между этими состояниями возможны переходы, направление которых определяется (см. [3, 4]) неравенством $\delta G \leqslant 0$. Поэтому существенно получить удобные при решении конкретных задач выражения для потенциала Гиббса в локально равновесных состояниях.

3. Используя (5), находим

$$\begin{gathered} H^2 + \lambda^{-2} f^2 (\varphi_0 \nabla\theta - \mathbf{A})^2 = \operatorname{div}\{\varphi_0 \theta \operatorname{rot} \mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{H}]\}, \\ H_e^2 = \operatorname{div}[\mathbf{A}_e, \mathbf{H}_e] + \mathbf{A}_e \operatorname{rot} \mathbf{H}_e, \end{gathered} \tag{9}$$

так, что (с учетом (6)) выражение (2) можно представить в виде

$$F'' = \frac{\varphi_0}{8\pi} \int \operatorname{div} (\theta \operatorname{rot} \mathbf{H})\, dV_s + \frac{1}{2c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j}_e dV_e. \tag{10}$$

Прежде чем использовать теорему Гаусса-Остроградского, необходимо выделить однозначную ветвь функции θ. С этой целью «проведем» разрезы S_k, $k = 1, 2, \ldots$, соединяющие осевые линии $\widetilde{\Gamma}_k$ вихревых нитей с поверхностью сверхпроводника. Как показал А. А. Абрикосов

* Подробное обсуждение свойств величины $[\theta]$ см. в [3]. Интегрирование вдоль линии γ ведется в направлении транспортного тока.

[5], разность значений θ на двух сторонах S_k равна единице. Поэтому получаем

$$\int \operatorname{div}(\theta \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV_s = \sum_k \int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S}_k + [\theta] \int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S},$$

где $[\theta]$ определяется согласно (4). Заметим, что линия γ должна выбираться внутри области однозначного определения θ, т. е. не должна пересекать ни одного из разрезов S_k. Используя теперь теорему Стокса и учитывая (8б), преобразуем (10) к виду

$$F'' = \frac{\varphi_0}{8\pi} \sum_k \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{l}_k + \frac{\varphi_0}{8\pi} J[\theta] + \frac{1}{2c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j}_e dV_e, \tag{11}$$

где Γ_k $(k=1, 2, \ldots)$ — замкнутая линия, ограничивающая разрез S_k.

4. Докажем теперь вспомогательное тождество

$$\varphi_0 \int \operatorname{div}(\theta_1 \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 - \theta_2 \operatorname{rot} \mathbf{H}_1) dV_s + 4\pi c^{-1} \int \mathbf{j}_e (\mathbf{A}_{e1} - \mathbf{A}_{e2}) dV_e = 0, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{H}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 \; (\mathbf{H}_{e1} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_{e1}), \quad \mathbf{H}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 \; (\mathbf{H}_{e2} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_{e2}),$$

убывающие на бесконечности и непрерывные на границе решения систем уравнений, аналогичных (5):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{1,2} = \lambda^{-2} f^2 (\varphi_0 \nabla \theta_{1,2} - \mathbf{A}_{1,2}), \; \operatorname{rot} \mathbf{H}_{e1,2} = 4\pi c^{-1} \mathbf{j}_e.$$

Предполагается, что здесь $\lambda^{-2} f^2$ — заданная (и одинаковая в обоих случаях) функция координат.

Используя эти уравнения, имеем

$$\varphi_0 (\nabla \theta_1 \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 - \nabla \theta_2 \operatorname{rot} \mathbf{H}_1) = \operatorname{div}\{[\mathbf{H}_2, \mathbf{A}_1] - [\mathbf{H}_1, \mathbf{A}_2]\},$$

$$4\pi c^{-1} j_e (\mathbf{A}_{e1} - \mathbf{A}_{e2}) = \operatorname{div}\{[\mathbf{H}_{e2}, \mathbf{A}_{e1}] - [\mathbf{H}_{e1}, \mathbf{A}_{e2}]\}.$$

Учитывая непрерывность $[\mathbf{H}_i, \mathbf{A}_k]$ на границе сверхпроводника, получаем (12).

5. В целях дальнейших преобразований выражения (11) введем лондоновское магнитное поле $\mathbf{H}_L = \operatorname{rot} \mathbf{A}_L$ $(\mathbf{H}_{eL} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_{eL})$ как непрерывное на границе, убывающее на бесконечности и удовлетворяющее условиям (8) решение системы уравнений (5), в которой вместо θ фигурирует функция θ_L, непрерывная на разрезах S_k. Иными словами, $\mathbf{H}_L$ $(\mathbf{H}_{eL})$ есть магнитное поле, которое существовало бы в нашей системе, если бы мы удалили все вихревые нити, оставив тем не менее неизменной плотность сверхпроводящих электронов (т. е. величину f^2). Полагая в тождестве (12) $\theta_1 = \theta_L$, $\theta_2 = \theta$, получим

$$\varphi_0 \sum_k \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{l}_k = 4\pi c^{-1} \{J([\theta] - [\theta_L]) + \int \mathbf{j}_e (\mathbf{A}_{eL} - \mathbf{A}_e) dV_e, \tag{13}$$

где $[\theta_L]$ определяется аналогично $[\theta]$ (см. (19)).

Используя (13) (чтобы исключить $[\theta]$), можно представить выражение (11) в виде

$$F'' = \frac{\varphi_0}{8\pi} \sum_k \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H}_v d\mathbf{l}_k + \frac{\varphi_0}{2c} J[\theta_L] + \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_e \mathbf{A}_e dV_e, \tag{14}$$

где мы обозначили

$$\mathbf{H}_v = \mathbf{H} - \mathbf{H}_L. \tag{15}$$

Поле $\mathbf{H}_v = \operatorname{rot} \mathbf{A}_v$, $\mathbf{H}_{ev} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_{ev}$ есть непрерывное на границе и убывающее на бесконечности решение системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_v = \lambda^{-2} f^2 (\varphi_0 \nabla \theta_v - \mathbf{A}_v), \ \operatorname{rot} \mathbf{H}_{ev} = 0, \tag{16а}$$

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}_v d\mathbf{S} = 0, \tag{16б}$$

где $\theta_v = \theta - \theta_L$, причем

$$\varphi_0 \frac{\partial \theta_v}{\partial n} - A_{vn} = 0 \tag{16в}$$

на внешней поверхности сверхпроводника. Функция θ_v имеет скачки (равные единице) на разрезах S_k, а величина $[\theta_v]$ определяется равенством (13).

6. Используя (1)—(4), (13) и (14), мы можем теперь представить локально равновесные значения свободной энергии и потенциала Гиббса в следующем виде:

$$\begin{gathered} F = F_{n0} - \frac{1}{8\pi} \int H_c^2 dV_s + F_L + F_v, \\ F_L = \frac{\varphi_0}{8\pi} J[\theta_L] + \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_e \mathbf{A}_{eL} dV_e, \\ F_v = F' + \frac{\varphi_0}{8\pi} \sum_k \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H}_v d\mathbf{l}_k, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} G = F_{n0} - \frac{1}{8\pi} \int H_c^2 dV_s - F_L + G_v, \\ G_v = F' + \frac{\varphi_0}{8\pi} \sum_k \oint_{\Gamma_k} (\mathbf{H}_v + 2\mathbf{H}_L)\, d\mathbf{l}_k. \end{gathered} \tag{18}$$

Для полноты картины выпишем еще явное выражение для $\varphi_0[\theta_L]$:

$$\varphi_0 [\theta_L] = \int_\gamma (\mathbf{A}_L + \lambda^2 f^{-2} \operatorname{rot} \mathbf{H}_L)\, d\mathbf{l}. \tag{19}$$

Ввиду предполагаемой квазизамкнутости рассматриваемой системы контур интегрирования в этом выражении можно замкнуть в области, где переменное магнитное поле отсутствует или пренебрежимо мало.

Существенно подчеркнуть, что поле $\mathbf{H}_L$ зависит от конфигурации вихревых нитей только через величину f^2. Если расстояния между вихревыми нитями велики по сравнению с длиной когерентности, почти всюду в сверхпроводнике $f^2 \simeq 1$, так что лондоновское поле практически не изменяется при переходах между различными локально равновесными состояниями, а, следовательно, можно положить $\delta G = \delta G_v$. Именно это обстоятельство оправдывает усилия, затраченные на вывод выражений (17)—(18).

Если транспортный ток отсутствует, сверхпроводник имеет цилиндрическую форму (с произвольным профилем), а внешнее поле (и вихревые нити) параллельны поверхности, пренебрегая эффектами вблизи торцов, из (18) находим

$$G_v = F' + \frac{\varphi_0 L}{8\pi} \sum_k \{H_v(\mathbf{r}_k) + 2\,[H_L(\mathbf{r}_k) - H_{0k}]\}, \tag{20}$$

где L — длина вихревых нитей, $\mathbf{r}_k$ — радиус-векторы их центров в плоскости, перпендикулярной внешнему полю, $H_{0k} = H_0$, где H_0 — значение внешнего поля на поверхности сверхпроводника. Выражения, эквивалентные (20), были ранее получены А. А. Абрикосовым, П. де Женом и В. В. Шмидтом [6—8]. Потенциал Гиббса для прямолинейных вихревых нитей в пластинке при наличии транспортного тока (перпендикулярного внешнему полю) также определяется выражением (20), причем H_{0k} есть значение магнитного поля на той из поверхностей пластинки (при наличии транспортного тока эти значения различны), с которой соединен разрез S_k. Этот результат согласуется с полученным в работе [9].

7. Положим теперь

$$\mathbf{H}_v = \mathbf{h}_{v1} + \mathbf{H}_v', \quad \theta_v = \theta_{v1} + \theta_v'$$

и будем считать, что функция θ_{v1} имеет скачок (равный единице) на разрезе S_1 и непрерывна на других разрезах. Поля $\mathbf{h}_{v1}$ и $\mathbf{H}_v'$ (и соответствующие им поля вне сверхпроводника) удовлетворяют системам уравнений, аналогичным (16а)—(16в), непрерывны на границе и убывают на бесконечности. С известными ограничениями (в пренебрежении нелинейными эффектами) можно считать, что $\mathbf{h}_{v1}$ есть собственное поле вихревой нити с осевой линией $\tilde{\Gamma}_1$, H_v' — суммарное поле остальных вихревых нитей. Полагая в (12) $\theta_{v1} = \theta_1$ и $\theta_v' = \theta_2$, $\mathbf{j}_e = 0$, получим

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H}_v' d\mathbf{l}_1 = \sum_{k \neq 1} \oint_{\Gamma_k} \mathbf{h}_{v1} d\mathbf{l}_k,$$

что позволяет переписать (18) в форме

$$G_v = F' + \frac{\varphi_0}{8\pi} \oint_{\Gamma_1} [\mathbf{h}_{v1} + 2(\mathbf{H}_v' + \mathbf{H}_L)] \, d\mathbf{l}_1 + G_v',$$

$$G_v' = \frac{\varphi_0}{8\pi} \sum_{k \neq 1} \oint_{\Gamma_k} (\mathbf{H}_v' + 2\mathbf{H}_L) \, d\mathbf{l}_k. \tag{21}$$

Величина G_v' зависит от формы и положения линии $\tilde{\Gamma}_1$ только через величину f^2.

8. Общие результаты (17)—(19) и (21) были получены на основе выражений (1)—(2), характерных для теории Гинзбурга—Ландау, применимость которой ограничена температурным интервалом $T_k - T \ll T_k$ (при $\varkappa > 1$). Для сверхпроводников с большими значениями $\varkappa$ существует достаточно широкая область значений магнитного поля $H \ll H_{c2}$, в пределах которой распределение поля внутри сверхпроводника достаточно хорошо описывается уравнением Лондонов. Как известно, применимость этого уравнения не связана с близостью температуры к T_k. Соответствующие выражения для свободной энергии и потенциала Гиббса можно получить, заменив в приведенных выше выражениях теории ГЛ величину f^2 на единицу. Значение собственного поля вихревой нити на ее осевой линии должно в этом случае определяться (см., например, (1)) с помощью обрезания на расстоянии $\sim \xi(T)$. Таким образом, с логарифмической точностью выражения (17)—(18) и (21) остаются справедливыми при любых температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. М.: Наука, 1978, ч. 2, с. 213—220. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1957, с. 167—172. [3] Терновский Ф. Ф. Потенциал Гиббса для сверхпроводящих (второго рода) квазизамкнутых систем при на-

личии транспортного тока.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1981, 22, № 3, с. 35—40. [4] Терновский Ф. Ф. Влияние транспортного тока на распределение индукции в сверхпроводящем (второго рода) цилиндре.— ЖЭТФ, 1971, **60**, с. 1790—1803. [5] Абрикосов А. А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы.— ЖЭТФ, 1957, 32, с. 1442—1452. [6] Абрикосов А. А. О нижнем критическом поле тонких слоев сверхпроводников второй группы.— ЖЭТФ, 1964, **46**, с. 1464—1469. [7] Де Жен, П. Сверхпроводимость металлов и сплавов.— М.: Мир, 1968, с. 80—83. [8] Шмидт В. В. Критический ток идеального сверхпроводника второго рода в смешанном состоянии.— ЖЭТФ, 1971, **61**, с. 398—413. [9] Шмидт В. В. О критическом токе в сверхпроводящих пленках.— ЖЭТФ, 1969, 57, с. 2095—2106.

Поступила в редакцию
29.05.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 538.3:530.145

ДВУХФОТОННОЕ РОЖДЕНИЕ НЕЙТРИНО В СИЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Ю. М. Лоскутов, В. В. Скобелев

(кафедра теоретической физики)

Взаимодействию типа $(\gamma\gamma)(\nu\bar{\nu})$ в рамках КЭД и обычной схемы Ферми соответствует, как известно, нулевая амплитуда [1]. Однако при наличии внешнего электромагнитного поля, влияющего на промежуточные электронные состояния, возможно появление отличной от нуля амплитуды и осуществление процессов вида $\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}$, $\gamma\nu\to\gamma\nu$ и т. д. Первый из них, рассматриваемый в данной работе, является конкурирующим с другим механизмом фоторождения нейтрино $\gamma\to\nu\bar{\nu}$ [2], который, однако, запрещен в чисто магнитном поле с индукцией $B\gg B_0$ ($B_0=m^2/e=4{,}41\cdot 10^{13}$ Гс) и при малой концентрации плазмы.

Процесс $\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}$ описывается диаграммой, содержащей нечетное число вершин в петле, а матричные элементы таких диаграмм в лидирующем (линейном) порядке по сверхсильному магнитному полю $B\gg B_0$ обращаются в нуль как при наличии векторных, так и псевдовекторных вершин [2]. В следующем приближении по обратному полю матричный элемент должен выходить на константу в асимптотике $B\to\infty$. Эти диаграммы не укладываются в рамки созданной в [2—5] схемы расчета процессов взаимодействия в интенсивном внешнем поле (двумерное приближение КЭД), поскольку в последней учитывается лишь вклад основного уровня в электронные состояния. В данном случае необходимо найти следующий (кроме основного, «двумерного» [3]) член разложения по обратному полю точной функции Грина электрона в постоянном и однородном магнитном поле [6]. Для этой цели наиболее удобно ниже приводимое представление гриновской функции, справедливость которого может быть проверена непосредственной подстановкой в сингулярное уравнение Дирака (ось z — по полю):

$$G(x, y)=\exp\left[-\frac{i}{2}\gamma(x_1+y_1)(x_2-y_2)\right](2\pi)^{-4}\int G(p)\,e^{ip(x-y)}\,d^4p, \tag{1а}$$

$$G(p)=\frac{1}{\gamma q}\int_0^1 d\tau\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^q e^{-2z\tau}\left\{(\hat{p}_\parallel+m)\left[\frac{1-\sigma_3}{2}(1-2z\tau)-\frac{q}{1+\tau}\right]-q\hat{p}_\perp\right\}, \tag{1б}$$