(dn — планковское распределение равновесного поля излучения), получаем

$$I \approx 0,13\,\alpha^2 G^2 m^9 \left(\frac{kT}{m}\right)^{13} \sim 10^{21} \left(\frac{kT}{m}\right)^{13} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\cdot\text{с}}. \quad (7)$$

Ввиду сильной зависимости от температуры этот процесс в условиях нейтронных звезд может иметь значение лишь при $kT \sim m$ (и при подавлении конкурирующего механизма фоторождения $\gamma \to \nu\bar{\nu}$ [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Gell-Mann M. The reaction $\gamma+\gamma \to \nu+\bar{\nu}$.— Phys. Rev. Lett., 1961. 6, p. 70—71. [2] Скобелев В. В. О реакциях $\gamma \to \nu\bar{\nu}$ и $\nu \to \gamma\nu$ в сильном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 1263—1267. [3]. Loskutov Yu. M., Skobelev V. V. Nonlinear electrodynamics in a superstrong magnetic field.— Phys. Lett. A, 1976, 56A, p. 151—152. Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле.— Изв. вузов, сер. Физика, 1975, № 10, с. 142—143. [4] Скобелев В. В. Излучение мягких фотонов и формфакторы в двумерном приближении квантовой электродинамики.— ЖЭТФ, 977, 72, с. 1298—1305. О распространении фотона в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1301—1305. [5] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Радиационные поправки к массовому оператору электрона в двумерном приближении квантовой электродинамики.— Теор. и матем. физика, 1979, 38, с. 195—200. Формфакторы нейтрино в двумерном приближении квантовой электродинамики.— Там же, 1979, 39, с. 64—68. [6] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. О функции Грина уравнения Дирака для электрона в постоянном однородном магнитном поле. Комптон-эффект.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 3, с. 331—336.

Поступила в редакцию
18.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 539.12.01

О МИГРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В КРИСТАЛЛЕ

В. И. Григорьев

(кафедра квантовой теории)

1. **Введение.** Продвижение в область все меньших значений параметра λ/a (где λ — длина волны излучения, a — масштаб микроскопической неоднородности) порождает значительное число как экспериментальных, так и теоретических работ; все чаще появляются в печати и обзорные работы (см., например, [1] и список приведенной там литературы). Однако подавляющее число этих работ основано на использовании феноменологических методов описания процессов, относящихся к распространению излучения в веществе. В то же время детализированный микроскопический подход может плодотворно дополнить такое феноменологическое описание. Примером тому является хотя бы общеизвестная «Теорема погашения» Эвальда—Озеена (см., например, [2]) в оптике.

Попытку «перевода на квантовый язык» этой теоремы и представляет настоящая работа.

Обсуждаемая ниже задача, естественно, модельна. Вместо реального вещества рассматривается бесконечно протяженная идеальная кубическая решетка, в узлах которой неподвижно закреплены двухуровневые центры, могущие испускать и поглощать безмассовые и бесспиновые бозоны, имитирующие фотоны. Очевидно, что такая модель в значительной мере обеднена: ни важные поляризационные эффекты, ни явления, обусловленные тепловым движением и диссипациями, не находят в ней отражения. И тем не менее даже такая обедненная модель вовсе не лишена интереса, поскольку она позволяет уловить основные физические черты динамики распространения излучения в веществе.

2. **Описание теоретической модели.** Гамильтониан взаимодействия между квантами излучения (Θ-бозонами) и центрами, из которых построен кристалл, имеет вид:

$$H=\sum_f \{\bar{V}_f N_f \Theta_f^{(-)}+\bar{N}_f V_f \Theta_f^{(+)}\}\equiv\sum_f (H_f^{(-)}+H_f^{(+)}). \tag{1}$$

Индекс f, пробегающий бесконечный ряд значений, указывает номер узла, в котором происходит либо возбуждение центра (переход N_f+ $+\Theta_f\to V_f$), либо его высвечивание ($V_f\to N_f+\Theta_f$). $\Theta_f^{(\pm)}$ выражаются через операторы порождения $a^{(+)}(\mathbf{k})$ и поглощения $a^{-}(\mathbf{k})$ бозонов:

$$\theta_f^{(\pm)}=\int d^3k\cdot a^{(\pm)}(\mathbf{k})\,Q^{(\pm)}(\mathbf{k})\,e^{\pm it(\omega-\omega_0)\mp i\mathbf{k}\mathbf{x}_f}, \tag{2}$$

причем

$$[a^{(-)}(\mathbf{k}),\ a^{(+)}(\mathbf{k}')]=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Выступающие в (2) c-численные множители $Q^{\pm}(\mathbf{k})$ выражаются через матричные элементы излучательных переходов; не детализируя этих множителей, отметим лишь, что, как правило, $Q^{(\pm)}(\mathbf{k})=Q^{(\pm)}(\omega)$, где $\omega=|\mathbf{k}|$ (принимаются $\hbar=c=1$) и $Q^{(\pm)}(\omega)$ отличны от нуля лишь для длин волн, превосходящих «размеры» источников. Из-за одинаковости всех центров $Q^{(\pm)}(\omega)$ не зависит от номера узла; ω_0 — резонансная частота атомов.

Для операторов, относящихся к центрам, выпишем лишь отличные от нуля коммутаторы:

$$[N_f,\bar{N}_i]=\delta_{if};\ [V_f,\bar{V}_i]=\delta_{if}. \tag{3}$$

В качестве вектора физического вакуума (в отличие от «математического», обозначаемого $|0>$) выступает

$$|\Phi\rangle\equiv\prod_f \bar{N}_f|0\rangle, \tag{4}$$

что соответствует состоянию, в котором Θ-бозоны (имитирующие фотоны) отсутствуют, а все центры являются невозбужденными.

3. **Миграция однобозонного пакета.** При рассмотрении задачи об эволюции формы однобозонного пакета начальные условия таковы:

$$\Psi_{t=0}\equiv\Psi_{\text{нач}}=\int d^3k\cdot a^{(+)}(\mathbf{k})\,|\Phi>f(\mathbf{k}). \tag{5}$$

Пакетная функция $f(\mathbf{k})$ пока не конкретизируется, что, в частности, означает, что диапазон рассматриваемых длин волн никак не ограничивается заранее.

При $t>0$ вектор состояния Ψ можно, учитывая специфику обсуждаемой модели, разбить на две части: $\Psi=\Psi^{(0,1)}+\Psi^{(1,0)}$, где $\Psi^{(i,j)}$ обозначает вектор состояния с i бозонами и j возбужденными центрами.

Представим $\Psi^{(0,1)}$ и $\Psi^{(1,0)}$ в виде:

$$\Psi^{(0,1)}=\sum_f C_f(t)\,\bar{V}_f N_f|\Phi\rangle;\ C_f(t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\cdot C_f(\varepsilon)\,e^{it(\omega_0-\varepsilon)}; \tag{6}$$

$$\Psi^{(1,0)} = \int d^3k \cdot F(\mathbf{k}; t)\, a^{(+)}(\mathbf{k}) \,|\, \Phi\rangle; \; F(\mathbf{k}; t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \cdot F(\mathbf{k}; \varepsilon)\, e^{it(\omega-\varepsilon)}.$$

Подлежащие определению с-численные функции $F(\mathbf{k};\ \varepsilon)$ и $C_f(\varepsilon)$ находятся из уравнений

$$i\, \frac{\partial \Psi^{(1,0)}}{\partial t} = \sum_f H_f^{(+)} \Psi^{(0,1)} + i\delta(t)\, \Psi_{\text{нач}},$$

$$i\, \frac{\partial \Psi^{(0,1)}}{\partial t} = \sum_f H_f^{(-)} \Psi^{(1,0)}. \tag{7}$$

Прибавив в правой части первого из этих уравнений член $i\delta(t)\Psi_{\text{нач}}$ и потребовав, чтобы при $t \to -\infty$ вектор состояния Ψ обращался бы в нуль, мы учтем начальные условия (5).

Подстановка (6) в (7) и использование обозначения

$$\sum_f C_f(\varepsilon) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}_f) \equiv B(\mathbf{k}; \varepsilon) \tag{8}$$

приводят к уравнениям:

$$(\varepsilon - \omega) F(\mathbf{k}; \varepsilon) = Q^{(+)}(\omega) B(\mathbf{k}; \varepsilon) + f(\mathbf{k}),$$

$$(\varepsilon - \omega_0) B(\mathbf{k}; \varepsilon) = \rho \sum_l Q^{(-)}(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l) F(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l; \varepsilon). \tag{9}$$

При выводе (9) использовано следующее соотношение:

$$\sum_f e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_f} = \rho \sum_l \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{g}_l), \tag{10}$$

где $\rho = (2\pi/a)^3$, a^{-3} — плотность узлов решетки, $\mathbf{g}_l$ — вектор обратной решетки, имеющий компоненты $\{(2\pi/a) l_1;\ (2\pi/a) l_2;\ (2\pi/a) l_3\}$, где l_1, l_2, l_3 пробегают все целочисленные значения.

Уравнения (9) могут быть решены точно *. Действительно, учитывая периодичность $B(\mathbf{k}; \varepsilon)$ (из определения этой функции видно, что $B(\mathbf{k}+\mathbf{g}_l; \varepsilon) = B(\mathbf{k}; \varepsilon)$ при любом l), можно записать:

$$(\varepsilon - |\mathbf{k} + \mathbf{g}_l|) F(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l; \varepsilon) = Q^{(+)}(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l) B(\mathbf{k}; \varepsilon) + f(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l). \tag{11}$$

Подставляя определяемое этим уравнением $F(\mathbf{k}+\mathbf{g}_l; \varepsilon)$ во второе из уравнений (10), нетрудно найти $F(\mathbf{k}; \varepsilon)$:

$$F(\mathbf{k}; \varepsilon) = \frac{\left\{W(\mathbf{k}; \varepsilon) + \rho \dfrac{|Q(\mathbf{k})|^2}{\varepsilon - |\mathbf{k}|}\right\} f(\mathbf{k}) + \rho \sum\limits_{l \neq 0} \dfrac{Q^{(+)}(\mathbf{k})\, Q^{(-)} f(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l)}{\varepsilon - |\mathbf{k} + \mathbf{g}_l|} f(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l)}{(\varepsilon - |\mathbf{k}|)\, W(\mathbf{k}; \varepsilon)}, \tag{12}$$

где

$$W(\mathbf{k}; \varepsilon) \equiv \varepsilon - \omega_0 - \rho \sum_l \frac{|Q(\mathbf{k} + \mathbf{g}_l)|^2}{\varepsilon - |\mathbf{k} + \mathbf{g}_l|}.$$

Полученное $F(\mathbf{k}, \varepsilon)$ является точным решением, определяющим эволюцию бозонного пакета в рассматриваемом нами модельном кристалле.

---

* Я благодарен А. Б. Панкратову, обратившему мое внимание на эту возможность.

Поскольку наиболее интересно рассмотрение компактных пакетов, примем, что $f(\mathbf{k})$ описывает наложение волн, импульсы которых $\mathbf{k}$ имеют слабый разброс по отношению к некоторому среднему значению $\mathbf{p}$. Для плоско-волнового пакета, когда этот разброс вовсе отсутствует, функция $f(\mathbf{k})$ пропорциональна $\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$. При этом (12) принимает вид:

$$F(\mathbf{k};\ \varepsilon)\sim\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\left\{\frac{1}{\varepsilon-|\mathbf{p}|}+\frac{\rho\,|Q(\mathbf{p})|^2}{(\varepsilon-|\mathbf{p}|)^2\,W(\mathbf{p};\ \varepsilon)}\right\}+$$
$$+\frac{\rho\sum\limits_{l\neq 0}Q^{(+)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}_l)\,Q^{(-)}(\mathbf{p})\,\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{q}_l-\mathbf{p})}{(\varepsilon-|\mathbf{p}|)^2\,W(\mathbf{p};\ \varepsilon)}. \tag{13}$$

Первый из членов в правой части описывает распространение пакета в вакууме: все волны, составляющие пакет, имеют при этом фазовую скорость c. Как видно из дальнейшего, этот первый член полностью компенсируется остальными. Это можно интерпретировать физически как полное погашение первичной волны частью из тех вторичных бозонных волновых полей, которые порождаются в кристалле; остальная часть этих вторичных полей распространяется со скоростями, отличными от c. В этом и состоит существо теоремы погашения, которая рассматривается здесь на базе квантовой теории.

Прежде всего, убедимся, что «погашение» действительно имеет место, рассмотрев длинноволновые пакеты, для которых $|\mathbf{p}|\ll|g_l|$, $(l\neq 0)$.

Приведенные выше замечания относительно $Q^{(\pm)}(\mathbf{k})$ позволяют записать

$$|Q(|\mathbf{p}|)|^2\begin{cases}\neq 0 \text{ при } |\mathbf{p}|\ll|\mathbf{q}_l| & (l\neq 0),\\ \ \ 0 \text{ при } |\mathbf{p}|\gg|\mathbf{q}_l| & (l\neq 0),\end{cases} \tag{14}$$

что соответствует вполне реалистической ситуации: каждый центр поглощает и испускает лишь такие кванты, длина волны которых превосходит не только размеры «атомов», но и расстояния между ними.

Поскольку в длинноволновой области $Q^{(\pm)}(\mathbf{p}+\mathbf{g}_l)\approx Q^{(\pm)}(\mathbf{g}_l)$, что согласно (14) обращается в нуль, можно существенно упростить (13):

$$F(\mathbf{k};\ \varepsilon)\sim\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\left\{\frac{1}{\varepsilon-|\mathbf{p}|}+\frac{\rho\,|Q(\mathbf{p})|^2}{(\varepsilon-|\mathbf{p}|)\,((\varepsilon-\omega_0)\,(\varepsilon-|\mathbf{p}|)-\rho\,|Q(\mathbf{p})|^2)}\right\}=$$
$$=\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\frac{\varepsilon-\omega_0}{(\varepsilon-\omega_0)\,(\varepsilon-|\mathbf{p}|)-\rho\,|Q(\mathbf{p})|^2}. \tag{15}$$

Таким образом, член, ответственный за невозмущенную первичную волну, действительно полностью компенсируется. Остающееся же выражение получает особенную наглядность при переходе к пространственно-временно́му описанию.

Пространственно-временна́я картина эволюции пакета определяется функцией $\varphi(\mathbf{x};\ t)$, выражаемой через $F(\mathbf{k};\ \varepsilon)$:

$$\varphi(\mathbf{x};\ t)=\frac{i}{2\pi}\int d^3k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\varepsilon\cdot F(\mathbf{k};\ \varepsilon)\,e^{-i\varepsilon t+i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \tag{16}$$

Подставляя в (16) найденное выше значение (15) для $F(\mathbf{k};\ \varepsilon)$ и вводя обозначения:

$$\Delta(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\left(\frac{(|\mathbf{p}|-\omega_0)}{2}\right)^2 + \rho|Q(\mathbf{p})|^2}\,; \qquad \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(1,2)} = \frac{(\omega_0+|\mathbf{p}|)}{2} \pm \Delta(\mathbf{p}), \tag{17}$$

получим для $\varphi(\mathbf{x};\, t)$ такое выражение:

$$\varphi(\mathbf{x};\, t) = N\,\frac{(\varepsilon_p^{(1)}-\omega_0)\, e^{-it\varepsilon_p^{(1)}} - (\varepsilon_p^{(2)}-\omega_0)\, e^{-it\varepsilon_p^{(2)}}}{2\Delta(\mathbf{p})}\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \tag{18}$$

(N — нормировочный множитель).

Полученное выражение соответствует следующей картине эволюции длинноволнового пакета:

каждая из плоских волн, формирующих начальный пакет, расщепляется на две волны (две известные «ветви»), распространяющиеся в том же направлении, что и начальная, но с различными амплитудами и скоростями.

В далекой от резонанса области, т. е. при $[(\omega_0-|\mathbf{p}|)/2]^2 \gg \rho|Q(\mathbf{p})|^2$, одна из этих волн переходит в начальную, а амплитуда другой обращается в нуль; иначе говоря, кристаллическая решетка не оказывает ощутимого влияния на распространение таких нерезонансных пакетов.

Пакеты же, построенные из волн, лежащих в резонансной области, что определяется условием $[(\omega_0-|\mathbf{p}|)/2]^2 < \rho|Q(\mathbf{p})|^2$, эволюционируют по-иному: здесь происходит выравнивание амплитуд «ветвей» (они приближаются к значениям, равным половине начальной амплитуды), и получающееся при этом $\varphi(\mathbf{x};\, t)$ таково:

$$\varphi(\mathbf{x};\, t) \to N\cos(\Delta(\mathbf{p}_{\text{рез}})\, t)\, e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{x}\mathbf{p}_{\text{рез}}}; \quad |\mathbf{p}_{\text{рез}}| \cong \omega_0. \tag{19}$$

Появляющиеся при этом биения соответствуют периодической перекачке энергии от волны к среде и обратно; здесь уместно напомнить, что в рассматриваемой модели не учитывается диссипация, что, в частности, находит свое проявление и в той физической картине, которой отвечает (19).

Перейдем теперь к рассмотрению коротковолновых пакетов, т. е. пакетов, построенных из волн, для которых $a/\lambda \gg 1$.

Принимая, что $Q^{(\pm)}(\mathbf{p}+\mathbf{g}_l) \neq 0$ хотя бы для некоторых $l \neq 0$ (иначе исключается из рассмотрения взаимодействие между решеткой и такими пакетами), и возвращаясь вновь к обсуждению плоско-волновых пакетов, нетрудно установить наличие как общих черт, так и различий между картинами миграции в кристалле длинноволновых и коротковолновых пакетов.

Общим является факт «погашения» первичной волны, о котором уже говорилось выше. Действительно, первые два члена в (13) можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{\varepsilon-|\mathbf{p}|} + \frac{\rho|Q(\mathbf{p})|^2}{(\varepsilon-|\mathbf{p}|)\left(\varepsilon-\omega_0-\rho\dfrac{|Q(\mathbf{p})|^2}{\varepsilon-|\mathbf{p}|}-\rho\sum\limits_{l\neq 0}\dfrac{|Q(\mathbf{p}+\mathbf{g}_l)|^2}{\varepsilon-|\mathbf{p}+\mathbf{g}_l|}\right)} =$$

$$= \frac{\varepsilon-\omega_0-\rho\sum\limits_{l\neq 0}|Q(\mathbf{p}+\mathbf{g}_l)|^2/(\varepsilon-|\mathbf{p}+\mathbf{g}_l|)}{(\varepsilon-\omega_0)(\varepsilon-|\mathbf{p}|-(\varepsilon-|\mathbf{p}|)\rho\sum\limits_{l}|Q(\mathbf{p}+\mathbf{g}_l)|^2/(\varepsilon-|\mathbf{p}+\mathbf{g}_l|))}. \tag{20}$$

Поскольку компенсация члена, пропорционального $1/(\varepsilon-|\mathbf{p}|)$, происходит всегда, независимо от вида формфактора $Q^{(\pm)}(\mathbf{p})$ и длины волны начального бозона, эффект «погашения» первоначальной волны, распространяющейся со скоростью c, оказывается универсальным. Вполне естественно, что это «погашение» всего отчетливее проявляется в той — резонансной — области частот, где происходит наиболее интенсивная перестройка начального пакета под влиянием кристалла.

Основное же качественное отличие в эволюции коротковолновых и длинноволновых пакетов проявляется в том, что распространение последних происходит только в направлениях, задаваемых видом пакетной функции $f(\mathbf{k})$: каждая из плоских волн расщепляется на две, распространяющихся в том же направлении, что и первичная.

При рассмотрении же коротких волн ($a \gg \lambda$), кроме первичных, появляются и новые направления распространения волн, поскольку короткие волны дифрагируют на решетке.

4. **Перспективы.** Предлагаемая модель не только позволяет уловить основные черты картины распространения излучения в кристалле при различных значениях параметра a/λ, но и дает возможность исследовать процессы типа вынужденного излучения.

Хотя понятие о вынужденном излучении было введено Эйнштейном более полувека назад [3], переход от феноменологического к динамическому описанию остается пока еще не до конца решенной задачей. Если динамика вынужденного излучения на одном (двухуровневом) центре исследовалась многими авторами (см., напр. [4—10]), то многоцентровая задача еще нуждается в рассмотрении. Наиболее простой теоретической основой для такого рассмотрения и представляется предложенная в настоящей работе модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Колпаков А. В., Бушуев В. А., Кузьмин Р. Н. Диэлектрическая проницаемость в рентгеновском диапазоне частот.— УФН, 1978, **126**, с. 479—514. [2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970, с. 124—135. [3] Einstein A. Strahlung-Emission und Absorption nach der Quantentheorie.— Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1916. **18**, p. 318—323. [4] Lee T. D. Some special examples in renormalizable field theory.— Phys. Rev., 1954, **95**, p. 1329. [5] Heisenberg W. Lee model and quantisation of non linear field equations.— Nucl. Phys., 1957, **4**, p. 532. [6] Chew H. Production and scattering in simple models.— Phys. Rev., 1963, **132**, p. 2756. [7] Pagnamenta A. N—Θ-Bound state and uniquenes in the three-particle sector of the Lee model.— J. Math. Phys., 1966, **7**, p. 356. [8] Гостев В. Б., Френкин А. Р. Однонуклонные состояния в модели с фиксированным источником. — ДАН СССР, 1966, **169**, с. 1300. [9] Лучников Л. А. Решения уравнения Паули—Челлена для нестабильных и стабильных частиц.— ТМФ, 1973, **14**, с. 357—365. [10] Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М.: Атомиздат, 1978, 287 с.

Поступила в редакцию
20.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 533.933.15

О РАСЧЕТЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ В ПОСТОЯННОМ И ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЯХ

А. П. Ершов, В. А. Довженко, А. А. Кузовников

(кафедра электроники)

Необходимость разработки теории разряда в целом (как высокочастотного, так и на постоянном токе) делает весьма актуальной задачу нахождения функции распределения электронов по энергиям