

волны начального бозона, эффект «погашения» первоначальной волны, распространяющейся со скоростью c , оказывается универсальным. Вполне естественно, что это «погашение» всего отчетливее проявляется в той — резонансной — области частот, где происходит наиболее интенсивная перестройка начального пакета под влиянием кристалла.

Основное же качественное отличие в эволюции коротковолновых и длинноволновых пакетов проявляется в том, что распространение последних происходит только в направлениях, задаваемых видом пакетной функции $f(\mathbf{k})$: каждая из плоских волн расщепляется на две, распространяющихся в том же направлении, что и первичная.

При рассмотрении же коротких волн ($a \gtrsim \lambda$), кроме первичных, появляются и новые направления распространения волн, поскольку короткие волны дифрагируют на решетке.

4. Перспективы. Предлагаемая модель не только позволяет уловить основные черты картины распространения излучения в кристалле при различных значениях параметра a/λ , но и дает возможность исследовать процессы типа вынужденного излучения.

Хотя понятие о вынужденном излучении было введено Эйнштейном более полувека назад [3], переход от феноменологического к динамическому описанию остается пока еще не до конца решенной задачей. Если динамика вынужденного излучения на одном (двухуровневом) центре исследовалась многими авторами (см., напр. [4—10]), то многоцентровая задача еще нуждается в рассмотрении. Наиболее простой теоретической основой для такого рассмотрения и представляется предложенная в настоящей работе модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Қолпаков А. В., Бушуев В. А., Кузьмин Р. Н. Диэлектрическая проницаемость в рентгеновском диапазоне частот.—УФН, 1978, 126, с. 479—514. [2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970, с. 124—135. [3] Einstein A. Strahlung-Emission und Absorption nach der Quantentheorie.—Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1916. 18, p. 318—323. [4] Lee T. D. Some special examples in renormalizable field theory.—Phys. Rev., 1954, 95, p. 1329. [5] Heisenberg W. Lee model and quantisation of non linear field equations.—Nucl. Phys., 1957, 4, p. 532. [6] Chew N. Production and scattering in simple models.—Phys. Rev., 1963, 132, p. 2756. [7] Pagnamenta A. N— Θ -Bound state and uniqueness in the three-particle sector of the Lee model.—J. Math. Phys., 1966, 7, p. 356. [8] Гостев В. Б., Френкин А. Р. Одноуклонные состояния в модели с фиксированным источником. — ДАН СССР, 1966, 169, с. 1300. [9] Лучников Л. А. Решения уравнения Паули—Челлена для нестабильных и стабильных частиц.—ТМФ, 1973, 14, с. 357—365. [10] Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М.: Атомиздат, 1978, 287 с.

Поступила в редакцию
20.06.79

ВЕСТЬ МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 533.933.15

О РАСЧЕТЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ В ПОСТОЯННОМ И ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЯХ

А. П. Ершов, В. А. Довженко, А. А. Кузовников

(кафедра электроники)

Необходимость разработки теории разряда в целом (как высоко-частотного, так и на постоянном токе) делает весьма актуальной задачу нахождения функции распределения электронов по энергиям

(ФРЭЭ) для нестационарной и пространственно неоднородной плазмы. Для таких задач процедура решения может быть сведена к решению последовательности квазистационарных и квазиоднородных задач. Применение аналитических методов в этом случае является чрезвычайно ограниченным, так как даже для стационарной и однородной плазмы учет только дополнительного элементарного процесса может привести к необходимости изменения метода решения. Более того, в большинстве реализуемых случаев нельзя пренебречь нелинейностью исходного уравнения. Решение уравнения тогда представляет собой итерационный процесс, где на каждой итерации решается линейное дифференциальное уравнение. Аналитические методы, как правило, ограничиваются одной итерацией, с использованием в качестве нулевого приближения максвелловского распределения [1]. Однако такое ограничение справедливо, если нулевое приближение близко к истинной ФРЭЭ. В противном случае (самом распространенном) оно может привести к неконтролируемым ошибкам расчета.

Поэтому при конкретных расчетах более простым и эффективным представляется применение прямых численных методов расчета. Это позволяет и контролировать точность полученных решений. Весьма существенным при этом является универсальность, т. е. возможность включения как разнообразных элементарных процессов, так и членов, в которые время и координата входят как параметры. Однако даже в случае стационарной и однородной не сильноионизованной плазмы численные методы применяются недостаточно. В [2, 3] процедура решения нелинейного уравнения сведена к решению последовательности задач Коши. При таком подходе учет, например, ударов второго рода уже невозможен. В настоящей работе предлагается численный метод, основанный на сведении уравнения для ФРЭЭ к последовательности линейных краевых задач. Такой подход представляется более универсальным, так как позволяет без изменения общности учитывать разнообразные элементарные процессы. Он дает возможность естественно перейти к решению нестационарных и пространственно неоднородных задач.

§ 1. Метод решения кинетического уравнения. Уравнение для ФРЭЭ $f_0(V)$ в случае однородной, изотропной и стационарной плазмы может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d}{dV} \left\{ \frac{2m}{e} \cdot \frac{vV^{3/2}}{3} S(V) \frac{d}{dV} \left(\frac{f_0(V)}{\sqrt{V}} \right) + \frac{2m}{M} v_y V f_0(V) + v_{ee} V^{3/2} \left(\frac{2m}{e} A_1(V) \frac{d}{dV} \left(\frac{f_0(V)}{\sqrt{V}} \right) + [2A_2(V) \frac{f_0'(V)}{\sqrt{V}}] \right) \right\} = - \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{\text{ну}} \quad (1)$$

Здесь $v_y = v_{en} + v_{ei}$ — частота упругих столкновений электронов с атомами и ионами, $v = v_y + v_{ny}$ — полная частота столкновений, v_{ee} — частота междуэлектронных столкновений:

$$v_{ee} = v_{ei} = \pi e^2 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{n_e}{V^{3/2}} \ln \lambda,$$

$$S(V) = \frac{e^2 E^2}{m^2 (v^2 + \omega^2)} + \frac{3kTg}{M},$$

где

$$E = \begin{cases} E_n, & \omega = 0, \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}}, & \omega \neq 0, \omega \gg kv, \end{cases} \quad (2)$$

$$A_1(V) = \frac{2}{3} \frac{e}{m} \left\{ \int_0^V V f_0(V) \cdot dV + V^{3/2} \int_V^\infty \frac{f_0(V)}{\sqrt{V}} dV \right\},$$

$$A_2(V) = \int_0^V f_0(V) dV.$$

Интеграл неупругих столкновений запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{\text{нр}} = \sum_s [-v_s(V) f_0(V) + v_s(V + V_s) f_0(V + V_s)] - \\ - v_i(V) f_0(V) + 2v_i(2V + V_i) f_0(2V + V_i).$$

Считается, что при возбуждении уровня s электрон теряет энергию, равную потенциалу возбуждения V_s , а при ионизации — потенциалу ионизации V_i , причем оставшаяся энергия делится поровну между ионизирующим и вновь возникшим электроном.

ФРЭЭ должна удовлетворять следующим ограничениям:

1. Условию нормировки $\int_0^\infty f_0(V) dV = 1.$

2. Условию существования моментов $\langle V^n \rangle = \int_0^\infty V^n f_0(V) dV = M < \infty,$

где $n \geq -1$. Это означает, что $f_0(V)$ должна стремиться к 0 при $V \rightarrow \infty$ быстрее любой степенной функции, т. е. экспоненциально. Момент $\langle V^{-1} \rangle$ определяет электронный дебаевский радиус [4].

3. Условию сохранения числа частиц и энергии. Для этого необходимо, чтобы предел выражения в фигурных скобках в (1) равнялся нулю. При этом важно, как именно происходит такой предельный переход. В случае, когда $v_s \sim (V - V_s)$, при $V \rightarrow 0$ выражение в фигурных скобках пропорционально V^2 , и, так как при $V \rightarrow 0$ всегда $v \sim V^{1/2}$, получаем

$$\frac{f_0(V)}{\sqrt{V}} \sim (C + DV^\beta),$$

где $\beta \geq 2$ при $\omega = 0$, $\beta \geq 1$ при $\omega \neq 0$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1) с условиями

$$1) \int_0^\infty f_0(V) dV = 1, \quad 2) \lim_{V \rightarrow \infty} V^n f_0(V) = 0, \quad 3) \frac{f_0(V)}{\sqrt{V}} \Big|_{V=0} = C. \quad (3)$$

Уравнение (1) с условиями (3) может рассматриваться как краевая задача в области энергий $[0, \infty]$. Перейдем к новым переменным: $x = eV/k\Theta_e$, $Cx^{1/2}y(x)dx = f_0(V)dV$. Учитывая (3), соответствующим выбором Θ_e мы можем свести область интегрирования к $[0, 1]$ и представить (3) в виде граничных условий

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0. \quad (4)$$

Тогда C есть нормировочная константа, определяемая из условия

$$C \int_0^\infty x^{1/2} y(x) dx = 1. \quad (5)$$

Для того чтобы линеаризовать исходное уравнение, заменим его рекуррентной последовательностью линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dx} \left\{ p_{n-1}(x) \frac{dy_n}{dx} \right\} + r_{n-1}(x) \frac{dy_n}{dx} - q_{n-1}(x) y_n(x) = -f_{n-1}(x), \quad (6)$$

где коэффициенты p_{n-1} , r_{n-1} , q_{n-1} и f_{n-1} зависят от $y_{n-1}(x)$.

Уравнение (6) с условиями (4)–(5) заменим однородной, консервативной и монотонной разностной схемой второго порядка аппроксимации [5]. Полученное разностное уравнение решается быстрым и экономичным методом прогонки. При выполнении условий

$$p(x) \geq C_1 > 0, \quad |r(x)| \leq C_2 < \infty, \quad q(x) \geq 0$$

схема обладает абсолютной устойчивостью, что позволяет выбирать шаг исходя из требуемой точности решения.

Исходными величинами при расчете являются: род газа с соответствующими зависимостями от энергии частот упругих и неупругих столкновений электронов с атомами, значения приведенных поля E/p_0 и частоты ω/p_0 (p_0 — приведенное давление, E определено в [2]), степень ионизации $\rho = n_e/N_0$ и температура нейтрального газа T_g . Выбирая в качестве нулевого приближения максвелловское распределение $y_0(V) = e^{-V/T_e}$, полагаем $\Theta_e = \xi T_e$, где ξ — числовой множитель порядка 10–20. Таким образом,

$$y_0(x) = \begin{cases} e^{-\xi x}, & x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

На каждой итерации из уравнения баланса энергий

$$\begin{aligned} \mu_e E_n^2 &= \frac{1}{2} \sigma_{1r} E_0^2 = \\ &= \frac{2m}{M} \left(\langle v_y V \rangle + \frac{kT_g}{e} \int_0^\infty v_y V^{3/2} \frac{df_0}{dV} dV \right) + \sum_s \langle v_s \rangle V_s + \langle v_i \rangle V_i \quad (7) \end{aligned}$$

определялось значение поля, соответствующее найденному $y_n(x)$. При достижении заданной точности по E/p_0 итерационный процесс останавливался. Заметим, что выбор начального приближения достаточно произволен, кроме случая $v_{ec} \gg v_{eE}$ [6]. Здесь в качестве начальной должна браться температура T_e максвелловской ФРЭЭ (минимальная из всех возможных для данного значения поля), определяемая из уравнения баланса энергий (7) методом последовательных приближений. Тогда итерационный процесс сходится через несколько итераций, т. е. фактически близок аналитическому методу [1]. Это связано с тем, что при преобладающем влиянии электрон-электронных столкновений результирующая ФРЭЭ не сильно отличается от максвелловской и выбранное начальное приближение близко к истинной ФРЭЭ. Однако в общем случае тот факт, что $y_{n-1}(x)$ входит в уравнение для $y_n(x)$ под знаком интеграла, приводит к медленной сходимости итерационного процесса. Если $y_0(x)$ сильно отличается от истинной ФРЭЭ, достаточно точное решение получается лишь при большом числе итераций.

§ 2. О роли области малых энергий.

2.1. Вид интеграла неупругих столкновений. При расчете ФРЭЭ часто используют предположение о полной потере энергии электроном при неупругом соударении, что существенно упрощает

решение (1) аналитическими методами. При этом интеграл неупругих столкновений имеет вид:

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_{\text{н\ddot{u}}\text{}} = \sum_s [-v_s(V) f_0(V) + \langle v_s \rangle \delta(V)] - v_i(V) f_0(V) + \langle v_i \rangle \delta(V),$$

где $\delta(V)$ — дельта-функция. Это приводит к расходимости $f_0(V)/\sqrt{V}$ при $V \rightarrow 0$ в СВЧ-поле [7, 8]. Покажем, что, хотя интегралы нормировки и средней энергии в [7, 8] сходятся, пренебречь расходимостью ФРЭЭ нельзя. На рис. 1 для He (при $\rho \rightarrow 0$) представлена зависимость средней энергии электронов от $E_{\text{эф}}/\rho_0$ для двух представлений интег-

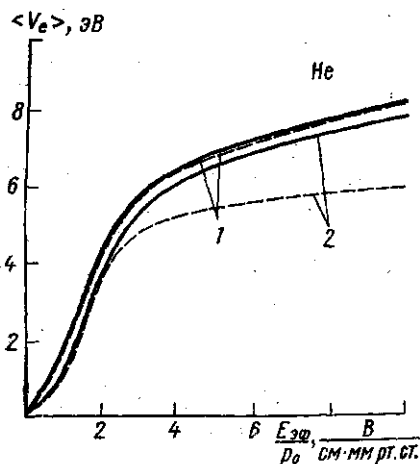


Рис. 1. Влияние предположения о характере потерь при неупругом столкновении на величину средней энергии электронов в He в постоянном поле (1) и СВЧ-поле (2): для полной потери энергии (пунктир) и для потери, равной порогу неупругого процесса (сплошная линия)

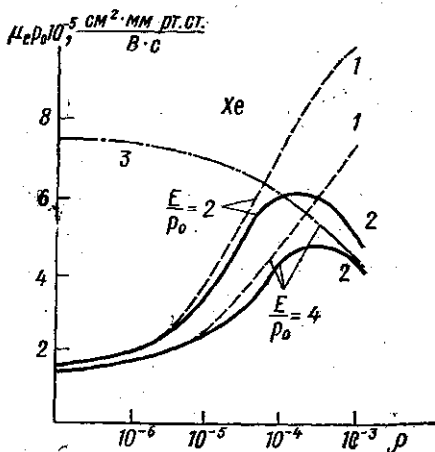


Рис. 2. Зависимость подвижности электронов от степени ионизации плазмы Хе; без учета электрон-ионных столкновений (1), с учетом электрон-ионных столкновений (2) и с учетом электрон-ионных столкновений для максвелловской ФРЭЭ (3)

рала неупругих столкновений в случае постоянного и СВЧ-полей ($E_n = E_{\text{эф}} \equiv \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v}{\omega}$, $\omega \gg v$). Помимо существенного отличия

$\langle V_e \rangle$ по величине, налицо физически неверный результат — для предположения о полной потере энергии увеличение $E_{\text{эф}}/\rho_0$ приводит в He к отходу от постоянно-токовой аналогии [9, 10].

2.2. О роли электрон-ионных столкновений. Несмотря на то что электрон-ионные столкновения происходят с той же частотой, что и междуэлектронные, при расчетах, как правило, их ролью пренебрегают. Это объясняют тем, что столкновения электронов с ионами существенны лишь в малой области энергий вблизи нуля. Однако известно, что величина коэффициентов переноса весьма чувствительна к виду зависимости суммарного сечения упругих соударений от энергии [11], так как определяется производной от сечения. Поэтому роль электрон-ионных столкновений даже при невысоких степенях ионизации может оказаться существенной.

Проиллюстрируем вклад электрон-ионных столкновений на примере расчета подвижности электронов $\mu_e \rho_0$ в Хе (рис. 2). Кривая 1 описывает зависимость $\mu_e \rho_0$ от ρ в пренебрежении электрон-ионными

столкновениями. В этом случае максвеллизация ФРЭЭ в области малых энергий с ростом ρ приводит к очень сильному увеличению подвижности (такой результат для Ag был получен в [3]). Однако кривая 2, учитывающая вклад электрон-ионных столкновений, даже качественно отличается от кривой 1 — зависимость $\mu_e \rho_0$ от ρ имеет немонотонный характер. Это легко объяснить с помощью кривой 3, показывающей зависимость подвижности от ρ для максвелловской ФРЭЭ с температурой, соответствующей заданному полю. Уже при степенях

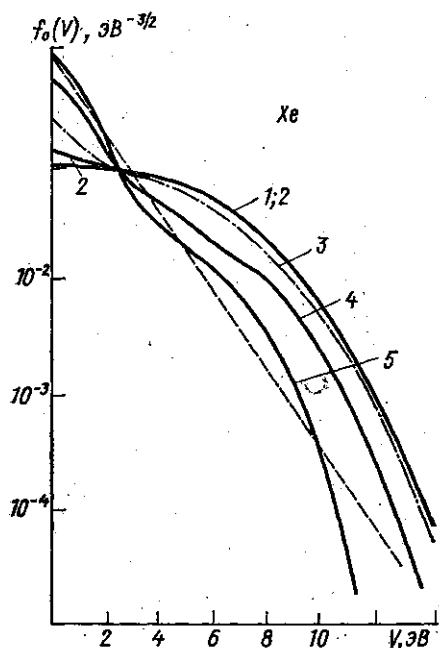


Рис. 3. Вид ФРЭЭ при различных значениях приведенной частоты поля $\omega/p_0=0$ (1); $1,5 \cdot 10^9$ (2); $5 \cdot 10^9$ (3); $15 \cdot 10^9$ (4) и $50 \cdot 10^9$ (5). $E_n/p_0 = E_0/\sqrt{2} p_0 = 30$ В/см·мм рт. ст., $\rho = 10^{-6}$. Пунктирная прямая — максвелловское распределение

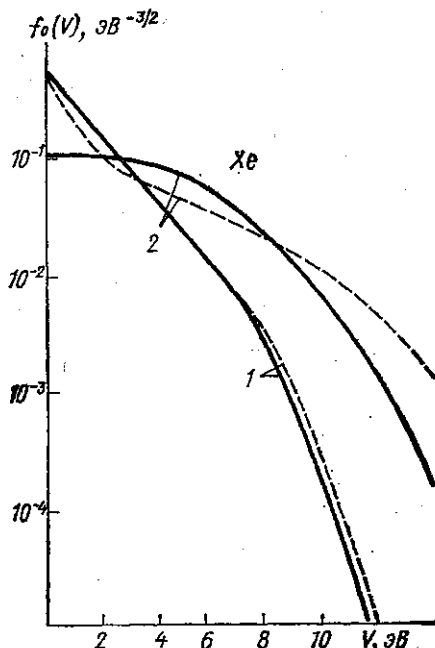


Рис. 4. Сравнение ФРЭЭ в постоянном (сплошная линия) и СВЧ-полях (пунктир) при одинаковых средних энергиях: $\bar{\epsilon} = 1,9$ эВ (1) и $2,9$ эВ (2)

ионизации $10^{-4} - 10^{-3}$ вклад электрон-ионных столкновений приводит к заметному уменьшению подвижности. Одновременное действие двух противоположных факторов и приводит к наблюдаемой немонотонной зависимости. Неучет электрон-ионных столкновений для $\rho \sim 10^{-3}$ дает ошибку в расчете подвижности $\sim 100\%$. Подчеркнем существенное влияние вида ФРЭЭ на величину подвижности: не являясь пороговой величиной, она тем не менее отличается при $\rho \rightarrow 0$ от величины, соответствующей максвелловской ФРЭЭ, примерно в 5 раз. Так как величина подвижности непосредственно входит в уравнение баланса энергий (11), электрон-ионные столкновения оказывают заметное влияние и на другие характеристики плазмы.

§ 3. Результаты расчетов. Изложенным выше методом были рассчитаны ФРЭЭ в плазме Xe в постоянном и переменном полях для различных значений приведенного поля и степеней ионизации. Эти результаты иллюстрируются рис. 3—4. Зависимость от энергии сечения

упругих столкновений электронов с атомами взята из [12], сечения ионизации — из [13], сечения суммарного возбуждения — из [14]. Для повышения точности расчета ФРЭЭ в неупругой области была использована сильная зависимость коэффициента ионизации Таунсенда от сечения неупругих процессов. Так как точность измерения абсолютных величин сечения ионизации порядка 20—30% [13] и существенно превышает точность измерения сечений возбуждения, последнее корректировалось по абсолютной величине до совпадения рассчитанных α с экспериментальными данными при $\rho \rightarrow 0$.

Результаты расчета ФРЭЭ для различных значений ω/ρ_0 при постоянном значении E/ρ_0 (2) и степени ионизации $\rho = 10^{-6}$ представлены на рис. 3. Для постоянного поля отличие ФРЭЭ от максвелловской весьма существенно. Высокочастотное поле с частотами $\omega/\rho_0 \leq 5 \cdot 10^9$ Гц/(мм рт. ст.) приводит к обогащению ФРЭЭ в области малых энергий ($V \leq 2$ эВ), при больших энергиях ФРЭЭ близка к ФРЭЭ на постоянном токе. Увеличение ω/ρ_0 приводит к существенному отличию ФРЭЭ как от ФРЭЭ на постоянном токе, так и максвелловской. Даже при $\omega/\rho_0 = 5 \cdot 10^{10}$ Гц/(мм рт. ст.), когда $\omega^2/v_{эф}^2 > 10$, отличие от максвелловской ФРЭЭ еще значительно. ФРЭЭ в известной мере «осциллирует» около максвелловской. Отметим, что вид распределения при больших ω/ρ_0 (для давлений в единицы мм рт. ст., соответствующих СВЧ-диапазону) качественно близок к виду функций распределения, измеренных в СВЧ-разряде в Ar [15].

Сопоставим вид ФРЭЭ при одинаковых средних энергиях в постоянном и ВЧ-случаях (рис. 4). Видно, что ФРЭЭ близки только, когда распределение близко к максвелловскому, т. е. когда преобладающими являются междуэлектронные столкновения. В случае, когда полевой член в уравнении (1) является определяющим, ФРЭЭ во всем диапазоне энергий резко отличаются друг от друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лягущенко Р. И. О распределении электронов по энергии в низкотемпературной плазме. — ЖТФ, 1972, 42, с. 1130—1142. [2] Winkler R., Wilhelm J. Geschwindigkeitsverteilungsfunktion und Bilanzgrößen der Elektronen bei mittleren Ionisierungsgraden in Argon unter homogenen stationären Bedingungen. — Beitr. Plasmaphys., 1971, 11, Н. 2, р. 159—177. [3] Winkler R. Geschwindigkeitsverteilungsfunktion und Bilanzgrößen der Elektronen des anisothermen Argon-Plasmas bei Ionisierungsgraden von 10^{-9} bis 10^{-2} . — Beitr. Plasmaphys., 1972, 12, Н. 3, р. 193—211. [4] Довженко В. А., Ершов А. П., Солнцев Г. С. Дебаевское экранирование и ионный ток на зонд в случае произвольной функции распределения электронов по энергиям. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон. 1978, 19, № 6, с. 9—15. [5] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 656 с. [6] Каган Ю. М., Лягущенко Р. И. О распределении электронов по энергиям в пологий столбе разряда. — ЖЭТФ, 1962, 32, с. 735—739. [7] Голант В. Е. Возникновение импульсного разряда в аргоне на сверхвысоких частотах I. Функция распределения электронов по скоростям. — ЖТФ, 1957, 27, с. 756—770. [8] Белоусов Е. В., Брюховедский А. С., Прокопов А. В. О некоторых свойствах СВЧ газового разряда в аргоне. — ЖТФ, 1974, 44, с. 91—97. [9] Довженко В. А., Солнцев Г. С. О функции распределения электронов по энергиям в плазме He в СВЧ поле. — В кн.: Вопросы физики низкотемпературной плазмы. Минск, 1972, с. 152—155. [10] Довженко В. А. Исследование стационарного СВЧ разряда внутри волновода в инертных газах. Канд. дис. М.: Изд-во МГУ, 1974, 147 с. [11] Настоящий А. Ф. Процессы переноса в ионизованном газе. — Теплофиз. высоких температур, 1965, 3, № 2, с. 191—194. [12] Хакелн Л. Кромпитон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977, 672 с. [13] Rapp D., Englander-Golden P. Total cross section for ionization and attachment in gases by electron impact. — J. Chem. Phys., 1965, 43, N 5, p. 1464—1479. [14] Scheiper M., Scheibner H. Absolutbestimmung der Gesamtanregungsguerrchnitte der Edelgase durch Electronenstoß. — Beitr. Plasmaphys., 1969, 9, Н. 1, р. 45—57. [15] Виногра-

УДК 536.6

ОБ ОДНОМ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик

(кафедра математики)

1. Как известно, регуляризирующие по Тихонову алгоритмы являются эффективным средством для решения обратных задач на ЭВМ. При математическом моделировании процессов теплопроводности, связанных с индукционной закалкой стальных цилиндрических образцов [1], возникают две «обратные» задачи. В стадии нагрева токами высокой частоты магнитное поле на поверхности $\omega(R, t) = h(t)$ должно быть задано так, чтобы обеспечить желаемое поведение температуры поверхности образца $\varphi(t)$ (рис. 1). Возникает обратная задача типа управления относительно неизвестной функции $h(t)$. При выборе модели процесса охлаждения быстрым потоком омывающей жидкости необходимо определить, какой из возможных законов теплообмена с окружающей средой [2] существен в различных временных интервалах. Возникает обратная задача типа интерпретации об определении функции $\Psi(u)$:

$$-k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \Psi(u), \quad (1)$$

если известна из эксперимента температура $\varphi(t)$ на поверхности образца.

Для решения обратных задач теплопроводности имеются регуляризирующие алгоритмы общего типа [3—4]. Однако при массовых расчетах более экономичными могут оказаться специальные регуляризирующие алгоритмы [1].

В настоящей работе дается общая для обеих названных задач формулировка специального алгоритма R_T , приводятся результаты его математического и «экспериментального» обоснования; приводятся также некоторые выходные характеристики индукционной закалки, полученные в результате моделирования процесса на основе предложенного алгоритма.

2. В рамках модели, принятой в [1], температурное поле в процессе индукционной закалки длинных стальных образцов на любом сегменте $[t_0, T]$ описывается нелинейным уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q(u, r, t) = c(u) \gamma(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

$$u(r, t_0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$