

УДК 536.6

ОБ ОДНОМ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик

(кафедра математики)

1. Как известно, регуляризирующие по Тихонову алгоритмы являются эффективным средством для решения обратных задач на ЭВМ. При математическом моделировании процессов теплопроводности, связанных с индукционной закалкой стальных цилиндрических образцов [1], возникают две «обратные» задачи. В стадии нагрева токами высокой частоты магнитное поле на поверхности $\omega(R, t) = h(t)$ должно быть задано так, чтобы обеспечить желаемое поведение температуры поверхности образца $\varphi(t)$ (рис. 1). Возникает обратная задача типа управления относительно неизвестной функции $h(t)$. При выборе модели процесса охлаждения быстрым потоком омывающей жидкости необходимо определить, какой из возможных законов теплообмена с окружающей средой [2] существен в различных временных интервалах. Возникает обратная задача типа интерпретации об определении функции $\Psi(u)$:

$$-k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \Psi(u), \quad (1)$$

если известна из эксперимента температура $\varphi(t)$ на поверхности образца.

Для решения обратных задач теплопроводности имеются регуляризирующие алгоритмы общего типа [3—4]. Однако при массовых расчетах более экономичными могут оказаться специальные регуляризирующие алгоритмы [1].

В настоящей работе дается общая для обеих названных задач формулировка специального алгоритма R_T , приводятся результаты его математического и «экспериментального» обоснования; приводятся также некоторые выходные характеристики индукционной закалки, полученные в результате моделирования процесса на основе предложенного алгоритма.

2. В рамках модели, принятой в [1], температурное поле в процессе индукционной закалки длинных стальных образцов на любом сегменте $[t_0, T]$ описывается нелинейным уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q(u, r, t) = c(u) \gamma(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

$$u(r, t_0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

при краевом условии (1). Плотность тепловых источников $q(u, r, t) = q(u, r, t) = \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2$ при нагреве определяется уравнениями Максвелла с условием $w|_{r=R} = h(t)$; при охлаждении $q \equiv 0$, а при нагреве, вследствие большой скорости процесса, оказывается возможным положить $\Psi(u) \equiv 0$ (1); $k(u)$, $c(u)$, $\gamma(u)$ — заданные [5, 6] функции температуры.

Алгоритмы решения таких задач на ЭВМ хорошо известны [7], и некоторый их комплекс реализован в [8]. Тем самым при любых заданных $h(t)$ либо $\Psi(u)$ определена температура на поверхности образца. В дальнейшем под $\chi(t)$ будем понимать любую из искомым

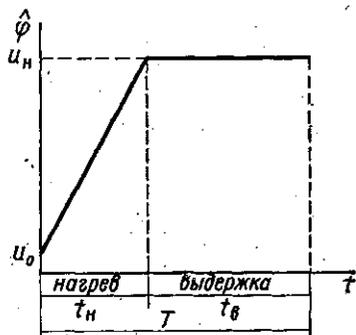


Рис. 1. Температура поверхности образца в стадии «нагрева»

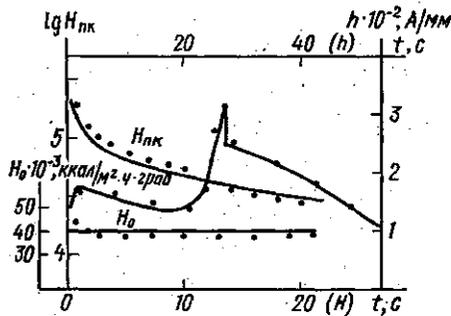


Рис. 2. Магнитное поле на поверхности образца из стали-40 и коэффициент теплообмена при охлаждении (H_0 — искомые, — «восстановленные»); $R=24$ мм, $t_n=27$ с, $t_6=28$ с, $u_n = 870^\circ\text{C}$, $f=2500$ Гц

функций: $h(t)$ или $\Psi^*(t) = \Psi[u(t)]$, а соответствующую ей температуру поверхности, получаемую из (1) — (2), обозначим через $v[t, \chi]$.

Рассмотрим последовательность ω_n сегментов $\Delta_s = [t_{s-1}, t_s]$, $s=1, 2, \dots, n$, $\cup \Delta_s \equiv [0, T]$, T — время нагрева ($t_0=0$). Пусть M_n — множество

кусочно-постоянных функций $\chi_n = \{\chi_s\}$, определенных на ω_n . Тогда для любого $\chi_n \in M_n$ оператору $v[t, \chi]$ составим последовательность операторов $\{v_s[t, \chi_s]\}$, определяемых задачей (1) — (2) при $t \in \Delta_s$ и условии непрерывности температуры в точке t_{s-1} . Тогда алгоритм R_T , реализующий выбор приближения из множества M_n , описывается последовательностью задач:

$$\min (\chi - \chi_{s-1})^2, \chi \in X_{\sigma_s} \equiv \{\chi \in R_0, \|v_s[t, \chi] - \varphi(t)\|_s^2 \leq \delta_s^2\},$$

$$s=1, 2, \dots, n, \chi_0=0. \quad (3)$$

Здесь $\|w_s\|^2 \equiv \int_{t_{s-1}}^{t_s} w^2(t) dt$, δ_s — либо мера допустимого отклонения от «желаемой» $\hat{\varphi}(t)$ (для нагрева), либо погрешность измерений $\tilde{\varphi}(t)$ (для охлаждения).

Алгоритм минимизации (3) относительно одной числовой переменной χ_s не представляет трудностей [1].

3. Основным является вопрос о влиянии на устойчивость алгоритма погрешности оператора $v_k[t, \chi_k]$, образующейся за счет неточного, по постановке задачи (3), определения предшествующих значений χ_s

($1 \leq s \leq k$), т. е. вследствие возмущения начальных условий в точке t_{k-1} . Назовем такую погрешность «транзитной», приближенное значение оператора обозначим $\tilde{v}_k[t, \chi_k]$ и рассмотрим вначале постановку задачи, «очищенную» от других источников погрешностей, связанных с разностной аппроксимацией оператора и самой χ .

Предположим (а), что для некоторой $\varphi(t)$ существует единственная $\hat{\chi} \in H_C(\varphi(t)) = v[t, \hat{\chi}]$, где H_C таково, что для любого k ($1 \leq k \leq n$)

$$\sum_{s=1}^k |\hat{\chi}_s - \hat{\chi}_{s-1}| \leq C \quad (\text{соответственно, } |\hat{\chi}_s| \leq C). \quad \text{Пусть (б) вместо } \varphi(t)$$

задана $\tilde{\varphi}(t)$:

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \equiv \int_0^T (\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t))^2 dt \leq \delta^2,$$

при заданой δ . Примем во внимание, что для коэффициентов уравнения (2), принадлежащих классу Гельдера [5], операторы $v_s[t, \chi]$ непрерывны по χ и начальным условиям и, кроме того, температурное поле, порожденное источниками, действующими при $t < t_{s-1}$, удовлетворяет принципу максимума при $t \geq t_{s-1}$. В силу этого примем, что (в) существует функция $F(x)$ ($F(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$) такая, что из существования решения $\chi^{k-1} \equiv \{\chi_i\}$, $i=1, 2, \dots, k-1$ цепочки (3) для $1 \leq s \leq k-1$ для любой χ_k следует оценка:

$$\|\tilde{v}_k[t, \chi_k] - v_k[t, \chi_k]\|_k \leq F\left(\sum_{s=1}^{k-1} |\chi_s - \hat{\chi}_s|\right)$$

для транзитной погрешности оператора.

Тогда оказывается верным в силу индукции и техники [1] следующее утверждение: при условиях (а)–(в) для любого $\delta > 0$ и любого конечного n найдется последовательность $\{\delta_s\}$, $s=1, 2, \dots, n$ ($\delta_s = \delta/n$), такая, что: 1) существует $\tilde{\chi} = R_T \tilde{\varphi}$ и 2) $\tilde{\chi} \equiv \chi_s$ удовлетворяет принципу регуляризации $\max_{1 \leq s \leq n} |\chi_s - \hat{\chi}_s| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. По смыслу утверждения

R_T следует назвать условно-регуляризирующим алгоритмом.

При аналогичных условиях установлено также, что если операторы $v_s[t, \chi_s]$ содержат еще и «внутреннюю» погрешность, связанную, например, с их аппроксимацией в рамках разностной схемы, то при любом конечном n и стремлении совокупной погрешности к нулю R_T удовлетворяет принципу регуляризации.

Как отмечалось выше, задача об определении амплитуды магнитного поля относится к задачам типа управления. Для нее предположение о существовании решения при точной $\tilde{\varphi}(t)$ (см. рис. 1), вообще говоря, неверно; для оценки эффективности алгоритма R_T достаточно предположить существование хотя бы одной функции $\chi^0 \in H_C$, для которой $\|v[t, \chi^0] - \tilde{\varphi}\| \leq \delta$. Тогда при некоторой модификации условий на оператор, вытекающих из принципа максимума, можно показать, что приближение $\tilde{\chi} = R_T \tilde{\varphi}$ принадлежит при любом n окрестности χ^0 , ширина которой имеет асимптотический порядок δ . В этом случае, при $\|v[t, \tilde{\chi}] - \tilde{\varphi}\| \leq \delta$, справедлива оценка:

$$\max_{1 \leq s \leq n} |\tilde{\chi}_s - \chi_s^0| \leq C^*(n) \delta, \quad (4)$$

где $C^*(n)$ — константа, не зависящая от δ .

Отсюда при $\chi^0 = \hat{\chi}$ следует, что алгоритм R_T является условно-регуляризирующим в классе кусочно-гладких функций (при $n \rightarrow \infty$) при соответствующем выборе последовательностей $\{\delta_s^{(n)}\}$ и выборе $\delta = \delta(n)$.

4. Рассмотрим результаты апробирования R_T на ЭВМ при $n=177$, $\delta_s^2=10^{-2}$, $\delta_s = \delta/n$ на «модельных» примерах, где искомые характеристики априорно выбирались соответствующими физике процессов. В частности, для $\Psi(u)$ рассмотрены как конвективный теплообмен:

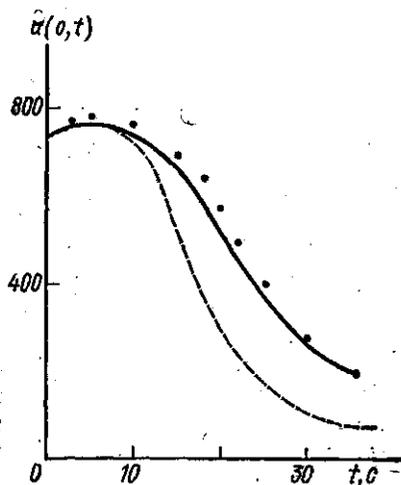


Рис. 3. Температура центра образца из стали-40 при охлаждении (..... — экспериментальные значения, — результаты расчета для принятой гипотезы о тепловых характеристиках, — результаты расчета при неверной гипотезе относительно тепловых характеристик); $R=24$ мм, $t_n=27$ с, $t_n=28$ с, $u_n=870^\circ\text{C}$, $f=2\,500$ Гц, $H_0=40\,000$ ккал/м²·ч·град

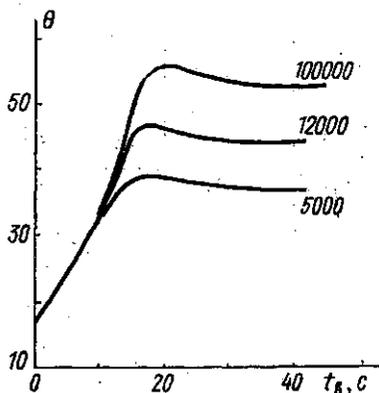


Рис. 4. Номограммы эффективной твердости закаленного образца из стали-40 (цифры на кривых — значения H_0 , ккал/м²·ч·град), $R=20$ мм, $t_n=4$ с, $u_n=880^\circ\text{C}$, $f=2\,400$ Гц

$\Psi(u) = H_0(u - u_0)$ при $H_0=40\,000$ ккал/м²·ч·град, $u_0=25^\circ\text{C}$, так и фаза пузырьчатого кипения: $\Psi(u) = H_{nk}(u - T_s) = 3^{3,33}(u - T_s)^{3,33}$ при $T_s=100^\circ\text{C}$ ($u = \varphi(t)$).

Результаты расчета (рис. 2), очевидно, свидетельствуют об эффективности алгоритма. При этом $\varphi(t)$ воспроизводится с графической точностью.

Интересны результаты использования R_T для изучения модели процесса в стадии быстрого охлаждения. При экспериментальном задании $\tilde{\varphi}(t)$ [9] на рис. 3 дано сопоставление с экспериментальным температурного поля, полученного в результате решения обратной задачи относительно $\Psi(u)$, при физически оправданной гипотезе относительно поведения тепловых характеристик [6]. Оказалось, что при охлаждении образца быстрым потоком омывающей жидкости теплообмен — конвективный. Заметим, что решение той же задачи при значениях $k(u)$, $c(u)$, $\gamma(u)$, отвечающих стадии нагрева [5], приводит к резкому расхождению с экспериментом, что является дополнительным подтверждением справедливости гипотезы [6] относительно этих величин.

5. Если, расширяя постановку [1], ввести в рассмотрение $\Delta^{(i)}$ — толщину слоя с не менее чем i -процентным содержанием мартенсита, то можно рассчитывать распределение твердости по радиусу образца и соответственно [10] «эффективную» твердость, θ , получаемую в результате закалки при различных ее режимах. Названные характеристики определяются автоматизированной обработкой результатов расчета температурных полей. На рис. 4 даны зависимости $\theta = \theta(t_b)$, где t_b — время выдержки, при различных «скоростях» поверхностного охлаждения (H_0). Обнаруживается существование и возможность априорной оценки «оптимального» времени выдержки, отвечающего θ max θ .

Таким образом, использование регуляризирующих алгоритмов позволяет проводить полное математическое моделирование физических и технологических процессов и получать выводы, позволяющие повысить эффективность последних.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И., Шкляр И. Н. Об одной обратной задаче теплопроводности.— Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, 19, № 3, с. 768—773. [2] Кобаско Н. И. Исследование с помощью ЭВМ тепловых процессов при закалке стали.— Металловед. и термич. обработка металлов, 1976, № 10, с. 8—13. [3] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974, с. 285. [4] Гласко В. Б., Захаров М. В., Колп А. Я. О восстановлении теплового потока к поверхности тела для нелинейного процесса теплопроводности на основе метода регуляризации.— Инж.-физ. журн., 1975, т. XXIX, № 1, с. 60—62. [5] Варгафтик Н. Б. Теплофизические свойства веществ. М.—Л.: Техноэнергоиздат, 1956, с. 93. [6] Гудремон Э. Специальные стали. М.: Металлургия, 1966. Т. 1, с. 240. [7] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 656 с. [8] Шкляр И. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И. Исследование с помощью ЭВМ температурных полей при нагреве Т. В. Ч. цилиндрических деталей.— Металловед. и термич. обработка металлов, 1977, № 9, с. 30—32. [9] Шепеляковский К. З., Шкляр И. Н., Кальнер В. Д. Области применения одновременного и непрерывно-последовательного нагрева при поверхностной закалке.— Электротермия, 1968, № 73, с. 51—53. [10] Шкляр И. Н., Шор Ф. И. Сопровождение малым пластическим деформациям валов, подвергнутых поверхностной закалке.— Вестн. машиностроителя, 1967, № 12, с. 59—63.

Поступила в редакцию
26.06.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 4

УДК 535.373.132

ЦЕНТРЫ ОКРАСКИ В КРИСТАЛЛОФОСФОРАХ НА ОСНОВЕ СУЛЬФИДА БАРИЯ

Е. П. Ефанова, В. В. Михайлин

(кафедра квантовой теории)

Сульфид бария принадлежит к группе соединений IIA-VIB, являющихся основой классических кристаллофосфоров. Соединения этой группы являются двухвалентными аналогами щелочно-галогидных кристаллов (ЩГК). Кристалл BaS обладает гранцентрированной кубической решеткой, соответствующей структуре NaCl [1]. Совпадение типа кристаллической решетки и подобие электронной структуры — причина того, что многие оптические свойства соединений IIA-VIB и ЩГК оказываются подобными. Например, в ЩГК обнаружены и ис-