керамики ЦТС-19 (*1*) диаметром 2,9 см и толщиной 1,2 см. В качестве пружин применялись дюралевые балки (*2*), которые опирались на кольцевые выступы металлических дисков (*3*). Резонансная частота балки, нагруженной массой, т. е. собственная частота отдельного звена цепочки, определялась по формулам, приведенным в работе [7], и составляла в данном случае $f_0=2{,}46$ кГц. Вся система помещалась в цилиндрический дюралевый корпус (*4*), который герметично закрывался тонкой пластиной из латуни (*5*). Рабочая поверхность преобразователя имела диаметр 5 см.

Измерения проводились по следующей схеме. Синусоидальное напряжение звуковой частоты подавалось с генератора на исследуемый излучатель и частотомер. Прием звукового сигнала с излучателя осуществлялся с помощью приемника. После усиления сигнал приемника поступал на осциллограф. Амплитуда сигнала измерялась в относительных единицах на экране осциллографа.

На рис. 3 приведены результаты экспериментов для синфазного ($\varphi_2=\varphi_3=0$) и противофазного ($\varphi_2=\pi$, $\varphi_3=0$) возбуждения пьезопластин, представленные в виде графиков зависимости относительной амплитуды сигнала на экране осциллографа от частоты, а также теоретически рассчитанные значения резонансных частот (f_1, f_2 и f_3). Из графиков следует, что расчетные резонансные частоты достаточно хорошо совпадают с измеренными экспериментально. Нижний из наблюдаемых резонансов имеет частоту около 1 кГц, что в 180 раз ниже частоты нижнего распределенного (полуволнового) резонанса использованных пьезопластин. Небольшое превышение расчетных частот над измеренными может быть объяснено тем, что расчет резонансных частот нагруженных балок с помощью метода Рэлея дает несколько завышенное значение частоты [7].

Приведенные результаты на конкретном примере доказывают возможность использования дискретных структур с пьезоактивными инерционными элементами в качестве многочастотных излучателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Простаков А. Л. Гидроакустические средства флота. М.: Воениздат, 1974, 127 с. [2] Sherman C. H. Underwater sound — a review. Part 1. Underwater sound trancducers.— IEEE Trans. Sonic and Ultrasonic, 1975, SU-22, N 5, p. 281—290. [3] Ультразвуковые преобразователи. Под ред. Е. Кикучи. М.: Мир, 1972, 424 с. [4] Свердлин Г. М. Прикладная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1976, 280 с. [5] Домаркас В. И., Кажис Р.-И. Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: Минтис, 1975, 256 с. [6] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974, с. 776. [7] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967, с. 30.

Поступила в редакцию
03.07.79

УДК 534.222

СИНТЕЗ НЕПРЕРЫВНЫХ СОГЛАСУЮЩИХ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ СТЕРЖНЕВЫМИ ВОЛНОВОДАМИ

Е. В. Именитова, К. В. Чернышев

(кафедра акустики)

Стержневыми будем называть твердые волноводы, диаметр которых мал в сравнении с длиной распространяющейся волны. В таких волноводах может распространяться только одна, низшая, мода. Влиянием нераспространяющихся мод на величину коэффициента отражения волны от места соединения двух волноводов разных поперечных размеров будем пренебрегать. Под согласованием понимается получение возможно меньшего интегрального коэффициента отражения в некоторой полосе частот.

Задачи на минимум коэффициента отражения часто возникают при расчете сложных конструкций для передачи и трансформации упругих колебаний. Решаются такие задачи применением согласующих переходов, поперечные размеры которых представляют собой непрерывные или кусочно-непрерывные функции координат. В тех случаях, когда согласование требуется осуществить на достаточно низких частотах, может оказаться, что допустимая длина согласующего перехода будет в несколько раз меньше длины волны, распространяющейся в волноводах. В этом случае можно говорить о задаче синтеза коротких согласующих переходов. Заметим, что методы, разработанные в СВЧ-радиотехнике, позволяют рассчитывать плавные согласующие переходы, длина которых примерно равна или больше длины распространяющейся волны [1, 2]. Эти методы, однако, неприменимы для синтеза коротких переходов.

Рассмотрим систему, состоящую из двух полубесконечных однородных круглых стержней разных диаметров и согласующего перехода — круглого соединительного стержня, площадь поперечного сечения $S(\tilde{x})$ которого является функцией продольной координаты $\tilde{x}$. Пусть начало и конец соединительного стержня имеют координаты $\tilde{x}=\tilde{0}$ и $\tilde{x}=\tilde{x}_0$, тогда площади его торцов равны $S(0)$ и $S(\tilde{x}_0)$. Площади поперечных сечений полубесконечных стержней обозначим через S_1 (для $\tilde{x}<0$) и S_2 (для $\tilde{x}>\tilde{x}_0$), плотности — через ρ_1 и ρ_2, скорости распространения продольных волн в них — через c_1 и c_2 соответственно. В дальнейшем будем использовать безразмерные волновые числа $k=\omega c_1/\omega_н c$, где ω — круговая частота волны, $\omega_н$ — нижняя круговая частота рабочего диапазона, и безразмерную координату $x=\tilde{x}\omega_н/c_1$.

Будем считать, что волна, падающая на входное сечение соединительного стержня, приходит к сечению $x=0$ из точки $x=-\infty$. Коэффициент отражения r положим равным T_a/T_r, где T_a и T_r — комплексные амплитуды напряжения падающей и отраженной волн в сечении $x=0$; тогда коэффициент отражения по энергии $R=|r|^2$. Наилучшее согласование обеспечивает соединительный стержень, при котором $\int\limits_{k_1}^{k_2} R^2 v(k)\,dk=\min$, где k_2 соответствует круговой частоте $\omega=\omega_в$ — верхней для рабочего диапазона частот, $v(k)>0$ — весовая функция, введение которой может оказаться целесообразным в некоторых задачах.

Одномерное уравнение продольных колебаний стержней переменного сечения для смещения $\xi(x)$ имеет вид:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+u(x)\frac{d\xi}{dx}+k^2\xi=0. \tag{1}$$

Здесь через $u(x)$ обозначена производная $d\ln S(x)/dx$, которую будем называть функцией управления. Уравнение (1) используем для определения формы согласующего стержня. Эта форма задается конкретным видом функции $S(x)$. Механическая прочность стержня будет обеспечена, если при любом x на отрезке $[0, x_0]$ будет $S\geqslant S_{\min}$, где $S_{\min}$ определяется условиями эксплуатации системы; равномерная непрерывность, которую будем требовать для функции $S(x)$, означает, что производная dS/dx ограничена по модулю. Следовательно, функция $u(x)$ должна удовлетворять неравенствам $u_{\min} \leqslant u(x) \leqslant u_{\max}$. В процессе решения задачи отыскивается функция $u(x)$, обеспечивающая минимальное значение интегрального коэффициента отражения, а затем по ней восстанавливается зависимость $S(x)$.

Коэффициент отражения r в сечении $x=0$ может быть выражен через фундаментальную систему решений $\varphi(x)$, $\psi(x)$ уравнения (1) [3]. Если эти решения удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0)&=1, & \psi(0)&=0, \\ \varphi'(0)&=0, & \psi'(0)&=1, \end{aligned} \tag{2}$$

то для $R=|r|^2$ справедливо выражение

$$R=\frac{\Phi-2\dfrac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\cdot\dfrac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}W}{\Phi+2\dfrac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\cdot\dfrac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}W}, \tag{3}$$

где

$$\Phi=\left[\frac{S_1 S(0)}{S_2 S(x_0)}\varphi(x_0)\right]^2+\left[\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\psi'(x_0)\right]^2+$$
$$+\left[\frac{S(0)\,\rho c\,\varphi'(x_0)}{S_1 k\,\rho_2 c_2}\right]^2+\left[\frac{k\,\rho_1 c_1 S_2}{\rho c S(x_0)}\psi(x_0)\right]^2, \tag{4}$$

W — вронскиан уравнения (1), величины ρ, c, k без индексов относятся к согласующему стержню.

Фундаментальная система решений φ, ψ полностью определяется заданием k, x_0 и $u(x)$, а через фундаментальную систему по формулам (3) и (4) определяется R, т. е. $R=R[k, x_0, u(x)]$. Таким образом, минимизации путем выбора подходящей функции $u(x)$ подлежит функционал

$$F[x_0, u(x)]=\int_{k_1}^{k_2} R^2[k, x_0, u(x)]\,v(k)\,dk. \tag{5}$$

Близкая по характеру задача рассмотрена также в [4]. Здесь, как и в [4], минимизацию будем осуществлять методом градиентного спуска. При этом решение задачи не является единственным, и результат зависит от выбора начального приближения.

Алгоритм минимизации функционала F существенно упрощается, если найти в общем виде операторные производные [5] от F по $u(x)$ и x_0. Ниже приводится расчет производных от F по $u(x)$ при фиксированном x_0.

Обозначим через $R_\delta(k)$ коэффициент отражения по энергии для системы с функцией управления $u(x)+\delta u_1(x)$, где δ — малый параметр, а $u_1(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. В дальнейшем будут также использованы функции φ_δ и ψ_δ — решения уравнения

$$\xi''+[u(x)+\delta u_1(x)]\xi'+k^2\xi=0 \tag{6}$$

с граничными условиями (2). Представим эти функции в виде разложения по параметру δ:

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x)&=\varphi(x)+\delta\varphi_1(x)+\delta^2\varphi_2(x)+\ldots, \\ \psi_\delta(x)&=\psi(x)+\delta\psi_1(x)+\delta^2\psi_2(x)+\ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — введенные ранее решения уравнения (1) с граничными условиями (2). При этом для $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ $(i=1, 2 \ldots)$ справедливы однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi_i(0)&=0, & \psi_i(0)&=0, \\ \varphi_i'(0)&=0, & \psi_i'(0)&=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя разложения (7) в уравнение (6), получим уравнения для $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1''(x)+u(x)\varphi_1'(x)+k^2\varphi_1(x)&=-u_1(x)\varphi'(x), \\ \psi_1''(x)+u(x)\psi_1'(x)+k^2\psi_1(x)&=-u_1(x)\psi'(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Решения уравнений (9) могут быть выражены через фундаментальную систему φ, ψ [6]. С учетом условий (8) найдем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)&=-\psi(x)\int_0^x \frac{u_1(t)\,\varphi(t)\,\varphi'(t)}{W}\,dt+\varphi(x)\int_0^x \frac{u_1(t)\,\varphi'(t)\,\psi(t)}{W}\,dt, \\ \psi_1(x)&=-\psi(x)\int_0^x \frac{u_1(t)\,\varphi(t)\,\psi'(t)}{W}\,dt+\varphi(x)\int_0^x \frac{u_1(t)\,\psi(t)\,\psi'(t)}{W}\,dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Вариацию δR коэффициента отражения по энергии определим как разность величин R_δ и R, в которой сохраняется только член, линейный по δ:

$$\delta R=\frac{4\,\dfrac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\cdot\dfrac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\,(W\,\delta\Phi-\Phi\delta W)}{\left[\Phi+2\,\dfrac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\;\dfrac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\,W\right]^2},$$

где

$$\delta\Phi=2\delta\left\{\left[\frac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\right]^2\varphi_1\varphi+\psi'_1\psi+\frac{1}{k^2}\left[\frac{S(0)}{S_1}\right]^2\varphi'_1\varphi'+\right.$$

$$\left.+k^2\left[\frac{S_2}{S(x_0)}\right]^2\psi_1\psi\right\},$$

$$\delta W=\delta(\varphi_1\psi'+\psi_1\varphi-\varphi'\psi-\psi_1\varphi'),$$

а φ' и ψ' определяются дифференцированием формул (10). В результате δR приводится к виду:

$$\delta R(k)=\delta\int_0^{x_0} f\,[k,\,u(t)]\,u_1(t)\,dt,$$

где

$$f\,[k,\,u(x)]=-4\,\frac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\;\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\,W(x_0)]\cdot\left\{2\left[\psi'(x_0)\,\varphi'(x_0)+\right.\right.$$

$$\left.+k^2\frac{S_2^2}{S^2(x_0)}\,\psi(x_0)\,\varphi(x_0)\right]\cdot\left[\frac{1}{k^2}\;\frac{S^2(0)}{S_1^2}\,\varphi(x)\,\varphi'(x)-\right.$$

$$-\psi(x)\psi'(x)\Big] - 2\varphi'(x)\psi(x)\frac{1}{k^2}\;\frac{S^2(0)}{S_1^2}\left[k^2\frac{S_2^2}{S^2(x_0)}\varphi^2(x_0)+\right.$$

$$\left.+\varphi'^2(x_0)\right]+2\varphi(x)\psi'(x)\left[\psi'^2(x_0)+k^2\frac{S_2^2}{S^2(x_0)}\psi^2(x_0)\right]-$$

$$-\Phi(x_0)W(x)\Big\}\Big/W(x)\left[\Phi(x_0)+2\frac{S(0)\,S_2}{S(x_0)\,S_1}\cdot\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}W(x_0)\right]^2.$$

Функция $f[k,\ u(x)]$ определяется уравнением (6) и от $u_1(x)$ не зависит.

Вариация функционала F может быть теперь представлена в виде:

$$\delta F=\delta\int_0^{x_0} f_1(x)\,u_1(x)\,dx,$$

где

$$f_1(x)=2\int_{k_1}^{k_2} v(k)\,R(k)\,f\,[k,\ u(x)]\,dk,$$

и не зависит от $u_1(x)$. По определению [5] $f_1(x)$ является градиентом функционала F по $u(x)$.

Производные функционала F по длине x_0 согласующего перехода рассчитывались по методу, изложенному в [4]. Первая и вторая производные имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=2\int_{k_1}^{k_2}\frac{\partial R}{\partial x_0}Rv\,dk,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}=2\int_{k_1}^{k_2}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2}R+\left(\frac{\partial R}{\partial x_0}\right)^2\right]v\,dk.$$

Приведенные выражения для $f_1(x)$, $\partial F/\partial x_0$, $\partial^2 F/\partial x_0^2$ использовались при составлении алгоритма минимизации. Общая схема минимизации совпадает с изложенной в [4]. Однако, поскольку выражение для третьего члена разложения функционала в ряд Тейлора оказывается в данном случае гораздо более громоздким, оценка начального шага в методе градиентного спуска проводилась по пробным расчетам. В связи с тем что основной интерес представляла задача получения коротких согласующих переходов, а при расчетах с переменным x_0 обнаружилась тенденция к увеличению их длины, синтез проводился при фиксированной длине согласующего перехода x_0. Согласовывались стержни из одинаковых материалов, т. е. $\rho_1=\rho_2$, $c_1=c_2$. Тот же материал был взят и для согласующего стержня.

На рис. 1 приведены два примера синтеза согласующих переходов для спектральной области $1\leqslant k\leqslant 2$. Рис. 1, *а* относится к согласованию стержней с отношением площадей поперечных сечений 1:5. Длина согласующего перехода меньше 1/3 максимальной длины волны рассматриваемого спектрального диапазона. В качестве начального приближения к профилю перехода был взят чебышевский переход. Отметим, что тот же конечный результат был получен и при другом выборе начального приближения в виде конического перехода, который заведомо не обеспечивает хорошего согласования. При этом расчет занимает больше времени. Этот результат убеждает в достаточной эффективности метода, дающего один и тот же результат при значительном изменении начального приближения.

На рис. 1,*б* приведен пример синтеза согласующего стержня для системы, в которой осуществить согласование гораздо труднее: переход меньше 1/4 максимальной длины волны, отношение площадей поперечных сечений волноводов 1:25. В этом случае коэффициент отражения без согласования превышает 85%. Чебышевский переход длиной

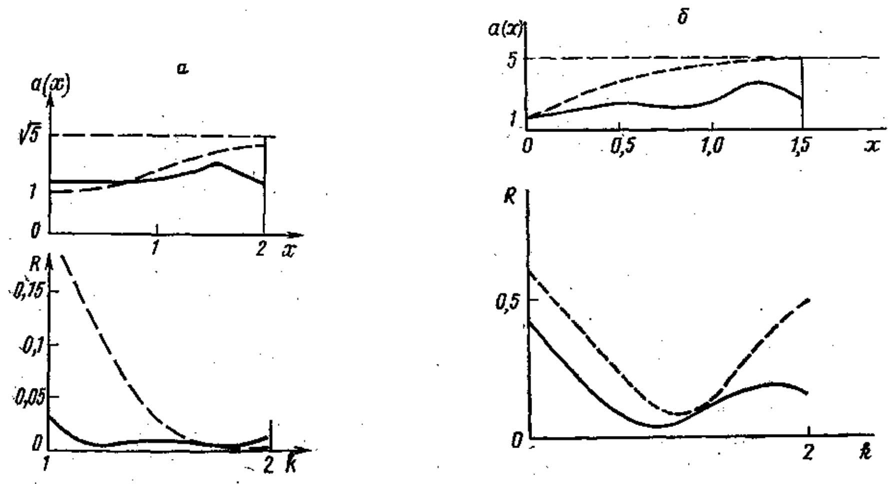

Рис. 1. Зависимость радиуса a перехода от координаты x и частотная зависимость коэффициента R в исходном приближении (штриховые линии) и полученные в результате расчетов (сплошные линии): *а* — отношение площадей поперечных сечений 1 : 5, длина согласующего перехода меньше $^1/_3$ максимальной длины волн; *б* — соответствующие параметры 1 : 25 и $^1/_4$

$x_0=1{,}5$ уменьшает его лишь незначительно и поэтому не является в данном случае хорошим начальным приближением. В качестве исходного был взят переход, рассчитанный следующим способом. Управляющая функция представлялась в виде отрезка степенного ряда: $u(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Такой выбор представления функции $u(x)$ связан с тем, что мы считаем эту функцию непрерывной, и согласно теореме Вейерштрасса она может быть сколь угодно точно аппроксимирована полиномом. Можно также показать, что решение уравнения (1) представимо в виде сходящихся рядов, коэффициенты которых вычисляются по рекуррентным формулам через коэффициенты c_i. Этот способ особенно удобен в тех случаях, когда требуемый уровень согласования может быть достигнут с помощью несложных переходов.

Все переходы, полученные описанным выше способом, имеют длину в несколько раз меньшую, чем известные плавные переходы. Главной особенностью коротких переходов является немонотонность их профиля и значительные скачки площади поперечного сечения на границах со стержневыми волноводами. Физически это можно объяснить следующим образом: локальные отражения от неоднородностей компенсируют друг друга за счет интерференции между волнами, отраженными от неоднородностей, что приводит к снижению коэффициента R.

Результаты расчетов показали, что немонотонность профиля полученных переходов увеличивается с уменьшением длины перехода и увеличением перепада радиусов волноводов (рис. 2). Существенная роль скачков сечения на границах перехода подтверждается результатами синтеза при дополнительном требовании непрерывности сечения на границах (рис. 2, *г*). Достигнутый уровень согласования в этом случае меньше, чем при наличии скачков. При этом вблизи границы с волноводом большого радиуса явно намечается тенденция к скачкообразному изменению профиля перехода.

Таким образом, разработанный метод синтеза непрерывных переходов, согласующих в заданной полосе частот стержневые волноводы,

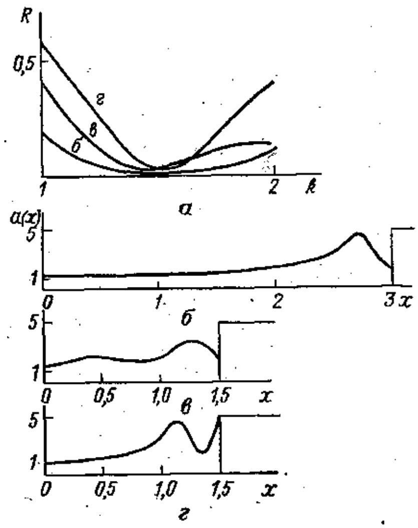

Рис. 2. Согласующие переходы между стержневыми волноводами с отношением площадей поперечных сечений 1 : 25 и соответствующие зависимости R от k

позволил получить короткие (в несколько раз короче длины волны) переходы. Выявлены существенные особенности таких переходов: немонотонность их профиля и наличие скачков сечения на границах со стержневыми волноводами. Эти особенности являются следствием того, что снижение коэффициента отражения с помощью таких переходов достигается прежде всего за счет интерференции между волнами, отраженными от неоднородностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Колебательные системы из отрезков неоднородных линий. М.: Сов. радио, 1972, 144 с. [2] Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М.: Связь, 1971, 388 с. [3] Тихонравов А. В. К задаче синтеза слоистых сред с непрерывно распределенными параметрами.— Опт. и спектроскопия, 1977, **42**, вып. 6, с. 1183—1187. [4] Именитова Е. В. О синтезе непрерывных согласующих систем.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, **19**, № 1, с. 42—46. [5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968, 496 с. [6] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, 576 с.

Поступила в редакцию
03.07.79