УДК 535.14:621.001

ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ МНОГОМОДОВОЙ НАКАЧКИ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Г. П. Джотян, Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

При анализе вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), возбуждаемого излучением накачки с широким частотным спектром, полезной явилась многомодовая модель [1—4], когда комплексные амплитуды накачки и стоксовой волны представлены как набор дискретных мод:

$$A_{\text{н}} = \sum_n A_n e^{in\Omega\theta},\ A_{\text{с}} = \sum_n a_n(z)\, e^{in\Omega\theta},\ \theta = t - z/u_{\text{н}}. \tag{1}$$

Аналитические выражения для функций $a_n(z)$, описывающих рассеяние, были получены в двух случаях: при малой интенсивности накачки $\overline{I}_{\text{н}} = \sum\limits_n I_n$, $I_n = |A_n|^2$ (некогерентный режим) и при сильной накачке (когерентный режим) *. В настоящей заметке эти результаты обобщаются на случай произвольной величины $\overline{I}_{\text{н}}$; получено точное решение уравнений для $a_n(z)$ с учетом дисперсионного члена (см. (3)).

Если принять, что межмодовое расстояние значительно больше, чем ширина спонтанной линии ($\Omega T_2 \gg 1$), то комплексную амплитуду молекулярных колебаний Q, удовлетворяющую уравнению

$$T_2\dot{Q} + Q = A_{\text{н}} A^*_{\text{с}},$$

можно с достаточной точностью считать одномодовым процессом:

$$Q = \sum_n Q_n(z)\, e^{in\Omega\theta} \simeq Q_0(z) = \sum_n a_n^*(z)\, A_n. \tag{2}$$

Эта возможность аппроксимации Q его усредненным (по межмодовым биениям) значением Q_0 существенно упрощает дальнейшее математическое рассмотрение **. Подставив (1) и (2) в уравнение для $A_{\text{с}}$

$$\frac{\partial A_{\text{с}}}{\partial z} + \nu \frac{\partial A_{\text{с}}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} g A_{\text{н}} Q^*,\ \nu = 1/u_{\text{н}} - 1/u_{\text{с}}$$

($u_{\text{н,с}}$ — групповые скорости, g — постоянная усиления), получим следующую систему уравнений для амплитуд мод $a_n(z)$ стоксовой волны [2]:

$$a_n'(z) + in\mu a_n(z) - \frac{1}{2} g A_n \sum_m a_m(z)\, A_m^* = 0, \tag{3}$$

$$a_n(z=0) = a_n^0. \tag{4}$$

---

* Для этих же предельных случаев точно решается и нелинейная задача, когда учитывается уменьшение интенсивности поля накачки в области рассеяния [1—3].

** Физический переход к (2) означает пренебрежение нерезонансными членами, относительная величина которых порядка $(\Omega T_2)^{-1}$, т. е. мала. Заметим, что эта оценка никак не связана с синхронизацией мод, т. е. упрощенное представление (2) для Q применимо как при синхронизованных, так и при несинхронизованных модах накачки.

Член с $\mu=\nu\Omega$ в (3) описывает дисперсию среды. Полученное ниже точное решение для (3) без труда обобщается на случай неэквидистантных мод и более сложного закона дисперсии: в приведенных выражениях для этого нужно заменить Ωn и μn функциями Ω_n и μ_n индекса n.

Уравнения (3) являются системой линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами, так что решение можно представить в виде суммы экспонент:

$$a_n(z)=\sum_s a_{ns}(z),\ a_{ns}(z)=B_{ns}e^{\gamma_s z}, \tag{5}$$

где γ_s — корни характеристического уравнения [1]

$$1-\frac{1}{2}\sum_m \frac{gI_m}{\gamma+im\mu}=0. \tag{6}$$

Таким образом, при многомодовой накачке стоксова волна состоит из набора волн (число волн равно числу мод накачки) с различными инкрементами усиления $\operatorname{Re}\gamma_s$.

Согласно (2) и (5)

$$Q_0^*=\sum_n a_n(z)A_n^*=\sum_s R_s e^{\gamma_s z},\ R_s=\sum_m A_m^* B_{ms}. \tag{7}$$

Представив (5) и (7) в (3) и приравняв коэффициенты при различных экспонентах, найдем зависимость постоянных B_{ns} от индекса n:

$$B_{ns}=\frac{(1/2)\,gA_n}{\gamma_s+in\mu}R_s. \tag{8}$$

Если внести (7) в (8), домножить на $A_n{}^*$ и просуммировать по n, то после сокращения на R_s придем к (6). Число инкрементов равно числу мод, т. е. матрица

$$[\alpha_{ns}]=\left[\frac{(1/2)\,gA_n}{\gamma_s+in\mu}\right] \tag{9}$$

является квадратной. Используя (5), (8) и (9), искомые амплитуды мод можно представить как

$$a_n(z)=\sum_s \alpha_{ns}R_s e^{\gamma_s z}, \tag{10}$$

где неизвестными остаются только постоянные R_s. Эти постоянные зависят от граничных значений (4). Полагая в (10) $z=0$, придем к системе уравнений, определяющих R_s:

$$\sum_s \alpha_{ns}R_s=a_n^0. \tag{11}$$

Решение для (11) можно записать в форме

$$R_s=\sum_n \beta_{sn}a_n^0, \tag{12}$$

где $[\beta_{ns}]=[\alpha_{ns}]^{-1}$ — матрица, обратная (9). Таким образом, решение уравнений (3) сводится к обращению матрицы (9).

При большом (или даже бесконечном) числе мод накачки применение обычного способа вычисления элементов обратной матрицы практически неосуществимо. Поэтому ниже используется другой подход, который позволяет сравнительно просто получить компактные выражения для β_{sn} в (12).

Пусть $a_n^+(z)=1(z)a_n(z)$, где

$$1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{-ik}dk=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z<0,\end{cases} \tag{13}$$

т. е. функция a_n^+ совпадает с a_n в области $z>0$ и равна нулю при $z<0$. Так как $1'(z)=\delta(z)$ и $a_n(z)\delta(z)=a_n^0\delta(z)$, то

$$(a_n^+)'=1(z)a'_n+\delta(z)a_n^0.$$

Следовательно, если умножить уравнения (3) на $1(z)$, то они перейдут в систему неоднородных уравнений

$$(a_n^+)'+in\mu a_n^+-\frac{1}{2}gA_n\sum_m a_m(z)A_m^*=a_n^0\delta(z), \tag{14}$$

в которые граничные значения a_n^0 входят в виде эквивалентных правых частей. Пусть

$$a_n^+(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}_n(k)e^{-ikz}dk. \tag{15}$$

Применяя к (14) преобразование Фурье, получим

$$\tilde{a}_n=\frac{(1/2)gA_n}{-ik+in\mu}\sum_m\tilde{a}_mA_m^*+\frac{1}{2\pi}\frac{a_n^0}{-ik+in\mu}$$

и нетрудно показать, что

$$\sum_m\tilde{a}_mA_m^*=\frac{1}{2\pi}\frac{\sum\limits_n\frac{a_n^0A_n^*}{-ik+in\mu}}{1-\frac{1}{2}\sum\limits_m\frac{gI_m}{-ik+im\mu}}. \tag{16}$$

Согласно (7) и (15)

$$1(z)Q_0^*(z)=\sum_m a_m^+(z)A_m^*=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_m\tilde{a}_mA_m^*e^{-ikz}dk. \tag{17}$$

Подставив (16) в (17), получим

$$1(z)Q_0^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-ik)e^{-ikz}dk, \tag{18}$$

где

$$F(\gamma)=\frac{\varphi(\gamma)}{\psi(\gamma)}=\sum_s\frac{F_s}{\gamma-\gamma_s}, \tag{19}$$

$$\varphi(\gamma)=\sum_n \frac{a_n^0 A_n^*}{\gamma+in\mu}, \quad \psi(\gamma)=1-\frac{1}{2}\sum_m \frac{gI_m}{\gamma+im\mu}; \tag{20}$$

γ_s — корни уравнения (6), которое можно написать как $\psi(\gamma_s)=0$. Умножив (19) на $(\gamma-\gamma_s)$, переходя к пределу $\gamma\to\gamma_s$, находим коэффициенты в (19):

$$F_s=\lim_{\gamma\to\gamma_s}(\gamma-\gamma_s)F(\gamma)=\lim_{\gamma\to\gamma_s}(\gamma-\gamma_s)\frac{\varphi(\gamma)}{\psi(\gamma)-\psi(\gamma_s)}=\frac{\varphi(\gamma_s)}{\psi'(\gamma_s)}. \tag{21}$$

Как следует из (18) и (19),

$$1(z)\,Q_0^*(z)=\sum_s F_s\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{-ik-\gamma_s}\,dk=$$

$$=\sum_s F_s e^{\gamma_s z}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{-ik}\,dk=1(z)\sum_s F_s e^{\gamma_s z} \tag{22}$$

(см. (13)). Сравнение (7) и (22) показывает, что $F_s=R_s$, т. е. согласно (20) и (21)

$$R_s=\frac{\varphi(\gamma_s)}{\psi'(\gamma_s)}=\frac{\sum\limits_n \dfrac{a_n^0 A_n^*}{\gamma_s+in\mu}}{\dfrac{1}{2}\sum\limits_m \dfrac{gI_m}{(\gamma_s+im\mu)^2}}. \tag{23}$$

Как следует из (12) и (23), элементы матрицы, обратной (9), равны

$$\beta_{sn}=\frac{A_n^*/(\gamma_s+in\mu)}{\dfrac{1}{2}\sum\limits_m\dfrac{gI_m}{(\gamma_s+im\mu)^2}}.$$

Выражения (10) и (23) полностью определяют точное решение системы уравнений (3). Проверим выполнение граничных условий (4). Используя (12), перепишем (10) в виде

$$a_n(z)=\sum_m a_m^0\sum_s \alpha_{ns}\beta_{sm}e^{\gamma_s z}. \tag{24}$$

Как известно, если $[\beta_{ns}]=[\alpha_{ns}]^{-1}$, то

$$\sum_s \alpha_{ns}\beta_{sm}=\delta_{nm}=\begin{cases}1 & (n=m),\\ 0 & (n\neq m),\end{cases}$$

и при $z=0$ согласно (24)

$$a_n(z=0)=\sum_m a_m^0\sum_s\alpha_{ns}\beta_{sm}=\sum_m a_m^0\delta_{nm}=a_n^0$$

в соответствии с (4).

Как следует из (6)

$$\operatorname{Re}\gamma_s \geqslant 0, \ \sum_s \gamma_s = \gamma_c, \tag{25}$$

где $\gamma_c = (1/2)\, g \sum_n I_n$ — инкремент, соответствующий когерентному режиму ВКР. К значению γ_c стремится один из корней уравнения (6) — например γ_1 — с ростом интенсивности накачки. Рассматривая режим ВКР, близкий к когерентному, ищем γ_1 в виде

$$\gamma_1 = \gamma_c (1 - \delta), \tag{26}$$

где δ — малая поправка, $|\delta| \ll 1$. Подстановка (26) в (6) дает

$$\delta = i\delta_1 + \delta_2,$$

$$\delta_1 = \frac{\mu}{\gamma_c} \frac{\sum_n nI_n}{\sum_n I_n}, \quad \delta_2 = \frac{\mu^2}{\gamma_c^2} \left[\frac{\sum_n n^2 I_n}{\sum_n I_n} - \left(\frac{\sum_n nI_n}{\sum_n I_n} \right)^2 \right],$$

так что

$$\operatorname{Re}\gamma_1 = \gamma_c (1 - \delta_2).$$

В частности, если спектр накачки симметричен $(I_{-n} = I_n)$, то

$$\operatorname{Re}\gamma_1 = \gamma_c \left[1 - \frac{\mu^2}{\gamma_c^2} \frac{\sum_n n^2 I_n}{\sum_n I_n} \right],$$

а при одинаковой интенсивности всех $M = 2N + 1$ мод накачки

$$\operatorname{Re}\gamma_1 = \gamma_c \left[1 - \frac{\mu^2}{\gamma_c^2} \frac{N(N+1)}{3} \right] = \gamma_c \left[1 - \left(\frac{\Delta\omega_{\text{н}} \nu}{g \bar{I}_{\text{н}}} \right)^2 \frac{N+1}{3N} \right]$$

или

$$\operatorname{Re}\gamma_1 = \frac{1}{2} g \bar{I}_{\text{н}} \left[1 - \left(\frac{I_{\text{кр}}}{\bar{I}_{\text{н}}} \right)^2 \frac{N+1}{3N} \right], \tag{27}$$

где $\Delta\omega_{\text{н}} = 2N\Omega$ — ширина спектра накачки, $\bar{I}_{\text{н}} = \sum_n I_n$ — ее суммарная средняя интенсивность, $I_{\text{кр}} = \Delta\omega_{\text{н}} |\nu| g^{-1} = 2\pi \Delta\nu_{\text{н}} \nu' g^{-1}$ — так называемая критическая интенсивность накачки [5] ($\Delta\nu_{\text{н}}$ — ширина спектра накачки в см$^{-1}$, $|\nu'| = c|\nu|$ — относительная дисперсия).

В области относительно малых значений интенсивности накачки корни уравнения (6) ищем в виде

$$\gamma_s = \frac{1}{2} g I_s (1 + \delta_s), \ |\delta_s| \ll 1.$$

В результате находим

$$\delta_s = i\delta_{s1} + \delta_{s2},$$

$$\delta_{s1} = -\frac{g}{2\mu} \sum_{m \neq s} \frac{I_m}{m - s}, \quad \delta_{s2} = \left(\frac{g}{2\mu} \right)^2 I_s \sum_{m \neq s} \frac{I_m}{(m - s)^2}.$$

Таким образом, для режима ВКР, близкого к некогерентному,

$$\operatorname{Re}\gamma_s = (1/2)\, g I_s (1 + \delta_{s2}),$$

или, при одинаковой интенсивности всех мод ($I_n = I$),

$$\mathrm{Re}\,\gamma_s = \frac{1}{2} gI \left[1 + \left(\frac{\bar{I}_н}{I_{кр}} \right)^2 \alpha \right], \tag{28}$$

где множитель

$$\alpha = \frac{N}{2N+1} \left(\sum_{n=1}^{N+s} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N-s} \frac{1}{n^2} \right)$$

порядка единицы.

Полученные оценки для γ_s показывают, что в режиме, близком к когерентному, усиление стоксовой компоненты ВКР происходит преимущественно за счет первой волны, и (10) можно переписать как

$$a_n(z) \simeq a_{n1}(z) = \alpha_{n1} R_1 e^{\gamma_1 z} =$$

$$= \frac{A_n}{\gamma_1 + in\mu} \frac{\sum_n a_n^0 A_n^* / (\gamma_1 + in\mu)}{\sum_m I_m / (\gamma_1 + im\mu)^2} e^{\gamma_1 z}. \tag{29}$$

Для остальных инкременентов можно, используя (25) и (27), сделать следующую оценку:

$$\mathrm{Re}\,\gamma_s \ll \mathrm{Re}\, \frac{\gamma_c - \gamma_1}{2N} = \frac{\gamma_c \delta_2}{2N} = \frac{1}{2} g \bar{I}_н \left(\frac{I_{кр}}{\bar{I}_н} \right)^2 \frac{N+1}{6N^2}, \quad (s \neq 1) \tag{30}$$

Таким образом, с ростом $\bar{I}_н$ величина $\mathrm{Re}\gamma_s (s \neq 1)$ сначала тоже растет (в области $\bar{I}_н \ll \bar{I}_{кр}$), но затем начинает уменьшаться и стремиться к нулю (в области $\bar{I}_н \ll I_{кр}$).

Максимальное усиление по интенсивности, создаваемое волнами с $s \neq 1$, оценим, интерполируя (приравнивая (28) и (30)):

$$G_{s\,max} = 2z (\mathrm{Re}\,\gamma_s)_{\bar{I}_н = \sqrt{3} I_{кр}} = \sqrt{3}\, \Omega |\nu| z.$$

Если $G_{s max}$ меньше порогового значения (последнее зависит, в частности, от a_n^0), то волны с $s \neq 1$ не будут давать заметного вклада в ВКР при любой мощности накачки.

Как видно из (29), спектр первой стоксовой волны в диспергирующей среде будет по форме несколько отличаться от спектра накачки за счет фактора $(\gamma_1 + in\mu)^{-1}$ (в среде без дисперсии $\mu = 0$ и оба спектра имеют одинаковый вид). Для s-й волны

$$a_{ns}(z) = \frac{A_n}{\gamma_s + in\mu} R_s e^{\gamma_s z} \quad (s \neq 1)$$

разница между спектрами может стать значительной из-за малой величины γ_s.

Особенностью ВКР при многомодовом возбуждении является сильная зависимость интенсивности стоксовой волны от фаз мод накачки. В частности, в среде без дисперсии рассеяние может быть подавлено полностью [2].

Полученные результаты позволяют рассмотреть этот эффект с учетом дисперсии среды. Условием подавления s-й волны является выполнение равенства

$$\sum_n \frac{a_n^0 A_n^*}{\gamma_s + in\mu} = 0. \tag{31}$$

При этом $R_s=0$ и $a_{ns}(z)=0$ (см. (10) и (23)). Условия (31) не могут быть выполнены одновременно для всех s, но в принципе можно, например, подавить все волны, кроме одной. Таким образом, фазовое подавление позволяет выделить любую из волн $a_{ns}(z)$ в (5). Хотя полное фазовое подавление ВКР в диспергирующей среде и невозможно, практически на этот эффект (и обусловленные им избыточные флуктуации мощности стоксовой компоненты — см. [4]) дисперсия среды влияет мало. Действительно, как было выяснено выше, основную роль при ВКР играет первая волна, условие подавления которой

$$\sum_n \frac{a_n^0 A_n^*}{\gamma_1 + in\mu} = 0$$

лишь незначительно отличается от соответствующего условия $\sum\limits_n a_n^0 A_n^* = 0$ в бездисперсионном случае.

В заключение отметим, что использованный здесь метод решения уравнений (3) может быть использован для анализа других типов рассеяния (например, ВРМБ или температурного), а также параметрического усиления, когда эти процессы возбуждаются в диспергирующей среде под действием многомодовой накачки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. Эффекты насыщения при ВКР и резонансном поглощении.— Письма в ЖЭТФ, 1973, 18, с. 519—521. [2] Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е. Насыщение ВКР при многомодовой накачке.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 3, с. 70—73. [3] Дьяков Ю. Е. Уравнение типа Дайсона для волн в оптически нелинейных средах (нелинейные задачи).— Краткие сообщения по физике (ФИАН), 1973, № 5, с. 39—45. [4] Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е., Зубарев И. Г., Миронов А. Б., Михайлов С. И. Усиление при ВКР немонохроматической накачки.— ЖЭТФ, 1977, 73, № 3 (9), с. 822—830. Влияние ширины спектра и статистики стоксова сигнала на эффективность ВКР немонохроматической накачки.— Квантовая электроника, 1977, № 4, с. 1377—1381. [5] Дьяков Ю. Е. Фоккер-планковское приближение в теории вынужденного рассеяния света.— Краткие сообщения по физике (ФИАН), 1971, № 7, с. 49—57.

Поступила в редакцию
27.07.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 539.17

ЗАВИСИМОСТЬ ИЗОМЕРНЫХ ОТНОШЕНИЙ $^{102mg}Ag$, $^{104mg}Ag$ и $^{105mg}Ag$ ОТ ЭНЕРГИИ ПРОТОНОВ

В. Д. Авчухов, К. А. Баскова, С. С. Васильев, Ю. В. Кривоногов, В. В. Кротова, С. Н. Лебединцев, Б. М. Макуни, В. А. Хрущев, Т. В. Чугай, Л. Я. Шавтвалов

Введение. Реакции с образованием составного ядра и последующим его распадом позволяют получить сведения о высокоэнергетической области непрерывного спектра возбуждений ядер из исследований функций возбуждения, спектров частиц и γ-квантов, а также по отношению выходов изомеров. Для описания процессов возбуждения на основе статистической модели вводится плотность уровней $\rho(E, I)$, которая зависит от энергии возбуждения E и углового момента I ядра. Зависимость плотности уровней от момента, т. е. распределение