

ко Д., Сарданашили Г. Модели с переменной топологией в теории поля.— Вестн. Моск. ун-та, Физ. Астрон., 1979, 20, № 3, с. 71—74. [4] Jehl H. Flux quantization and particle physics.—Preprint G. Washington Univ., 1972. [5] Barut A. Electromagnetic fields over manifolds with Betty numbers.—Preprint Colorado Univ., 1978.

Поступила в редакцию
21.09.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 519.281.1:539.104

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ МОМЕНТАМ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Б. Я. Юрков
(НИИЯФ)

Решение интегро-дифференциального уравнения переноса Льюиса [1] методом моментов по Спенсеру [2] предполагает возможность восстановления искомой зависимости $J(x)$ по вычисленным ее моментам J_n с помощью функции $\varphi(x)$, аппроксимирующей искомое распределение. При этом аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ должна отражать реальный физический процесс и быть достаточно простой, чтобы не затруднять вычислений ее моментов φ_n .

Однако в методе Спенсера [2] выбор параметров, определяющих аппроксимирующую функцию, и аппроксимирующих кривых искомого распределения производится с определенной долей произвола. Из проблемы моментов [3] известно, что последние не всегда определяют искомую функцию однозначно, и поэтому произвольный подбор параметров осложняет вопрос об однозначности представления такого распределения.

Наряду со спенсеровским подходом предлагались и другие способы восстановления функции по моментам, либо незначительно отличающиеся от спенсеровского [4], либо с более радикальными изменениями [5, 6, 7], но имеющие существенные недостатки. Так, в методе Эдейви [5] не учитывались высшие моменты J_n , определяющие асимптотическое (при $x \approx 1$) поведение искомого распределения. Тем же недостатком страдали методы, предложенные в работах [6, 7].

В данной работе предлагаются такие изменения спенсеровского метода, которые устраняют вышеуказанные недостатки.

В построении аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ для искомого распределения ионизационных потерь энергии быстрыми электронами $J(x)$ по глубине облучения x Спенсер исходил из известного распределения в асимптотическом случае ($x \approx 1$)

$$\varphi^a(\xi, x) = (1-x)^{-3/2} \exp[-\xi/(1-x)],$$

которое он экстраполировал на всю область изменения x :

$$\varphi(v, \xi, x) = (1-x)^v \exp[-\xi x/(1-x)] \quad (0 < x < 1). \quad (1)$$

Заметим теперь, что в асимптотическом случае моменты аппроксимирующей функции

$$\varphi_n(v, \xi) = \int_0^1 x^n (1-x)^v \exp[-\xi x/(1-x)] dx \quad (2)$$

можно получить в аналитическом представлении при любых значениях ν и ξ . Это утверждение легко проверить, если проследить весь проделанный Спенсером [2] ход вычисления $\varphi_n^a(\nu, \xi)$. В результате мы получаем асимптотические моменты аппроксимирующей функции

$$\varphi_n^a(\nu, \xi) = 2 \exp(\xi/2) \xi^{(\nu+1)/2} (n+1+r)^{-(\nu+1)/2} K_{(\nu+1)}(2\sqrt{\xi(n+1+r)}),$$

где $r = \nu/2 + \xi/12$. Используя разложение функции Макдональда в ряд (при больших аргументах*), имеем

$$\varphi_n^a(\nu, \xi) = \sqrt{\pi} \exp(\xi/2) \xi^{(2\nu+1)/4} (n+1+r)^{-(2\nu+3)/4} \exp(-2\sqrt{\xi(n+1+r)}). \quad (3)$$

Взяв отношение двух моментов φ_n^a (при достаточно больших индексах n , $J_n \approx \varphi_n^a$), находим

$$\sqrt{\xi} = \frac{\ln \frac{J_n}{J_{n+2}} - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) \ln \left(\frac{n+3+r}{n+1+r}\right)}{2(\sqrt{n+3+r} - \sqrt{n+1+r})}, \quad (4)$$

(при $\nu = -3/2$ это выражение совпадает со спенсеровским). В отличие от спенсеровского подхода, когда параметр ξ определялся только при асимптотическом значении $\nu = -3/2$, и далее считалось, что ξ от ν не зависит, мы будем вычислять (с помощью соотношения (4) методом итерации) асимптотический параметр ξ при любом значении ν , учитывая тем самым, зависимость ξ от ν . Ранее нами было показано [6], что и рекуррентные соотношения между моментами аппроксимирующей функции также имеют место при любых значениях ν и ξ :

$$\varphi_{n-1} = \frac{1}{n} [(2+2n+\nu+\xi)\varphi_n - (2+\nu+n)\varphi_{n+1}], \quad (n \geq 1). \quad (5)$$

Определив (при заданном ν и найденном ξ) согласно (3) два асимптотических момента при некотором большом n , с помощью формулы (5) можно вычислить все моменты $\varphi_n^a(\nu, \xi)$ вплоть до $n=0$. Затем для коррекции первоначально заданного значения ν используется связь между двумя первыми моментами [6]:

$$\nu = [1 + (2+\nu)\varphi_1]/\varphi_0 - \xi - 2. \quad (6)$$

Метод итерации позволяет определить параметр ν с любой точностью. Новое значение ν подставляется в (4), вновь определяется ξ , а также все $\varphi_n(\nu, \xi)$, затем из равенства (6) находится новое значение ν и т. д. до получения требуемой точности.

Таким образом, параметры ν и ξ определяются исключительно моментами искомой функции J_n и требованием соблюдения рекуррентных соотношений (5) и (6).

В методе Спенсера [2] искомое распределение $J(x)$ определялось (независимыми друг от друга четным и нечетным) рядами, состоящими из ограниченного числа аппроксимирующих функций (1) с аргументами x/β_i и соответствующими коэффициентами a_i . В дальнейшем Спенсер [8] усложнил выражение для аппроксимирующей функции:

$$\Psi(\nu, \xi, a_k, x/\beta_i) = (a_1 - a_2 x/\beta_i) \Phi(\nu, \xi, x/\beta_i), \quad (7)$$

задавая для новых параметров a_k произвольно значения 0 или 1.

* Если $\nu < 0$ и $|\nu| \gg 1$, то ограничиваться в разложении первым членом можно, очевидно, только при достаточно больших n (обычно $\xi \sim 1$).

В данной работе для аппроксимации искомого распределения предлагается использовать (в принципе, бесконечные) двойные ряды, обобщая спенсеровское представление аппроксимирующей функции (7)

$$\Psi_{ik} = f_k(x/\beta_i) \Phi(v, \xi, x/\beta_i), \quad f_k(x/\beta_i) = \sum_{k=0} a_k (x/\beta_i)^k.$$

В расчетах нечетное распределение будем представлять вырожденным двойным рядом ($i=k$):

$$J^{\text{неч}}(x) = \sum_{k=0} \eta_k (x/\theta_k)^k \Phi(v, \xi, x/\theta_k),$$

моменты которого будут равны

$$J_{2m+1} = \sum_{k=0} \eta_k \sigma_k^{m+1} \Phi_{2m+1+k}(v, \xi), \quad \sigma_k = \theta_k^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Четное распределение удобно представить в виде ряда

$$J^{\text{четн}}(x) = \sum_{k=0} \frac{\mu_k}{\rho_k} (x/\rho_k)^k \Phi(v, \xi, x/\rho_k), \quad (9)$$

моменты которого равны

$$J_{2m} = \sum_{k=0} \mu_k \tau_k^m \Phi_{2m+k}(v, \xi), \quad \tau_k = \rho_k^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Следует еще учесть соотношения, вытекающие из граничных условий. Если рассчитывается распределение ионизационных потерь энергии электроном по глубине облучения x и величина

$$\xi(t) = \sum_{p=1}^4 A_p \left[\frac{(1+\omega)t}{t+\omega} \right]^{p-3/2}$$

(ω — параметр, зависящий только от материала облучаемого образца и начальной энергии E_0) представляет собой нормированные ионизационные потери [8], то из условия разрыва искомой функции и ее производной в нуле для нечетного и четного распределения имеем

$$J^{\text{неч}}(0) = \xi(1) = 1; \quad (11)$$

$$\left. \frac{dJ^{\text{четн}}(x)}{dx} \right|_{x=0} = - \left. \frac{d\xi(t)}{dt} \right|_{t=1} = -\kappa, \quad (12)$$

где

$$\kappa = \omega/(1+\omega) \sum_{p=1}^4 (p-3/2) A_p.$$

С учетом (9) и (12) получаем

$$\mu_1 = [(v+\xi)\mu_0 - \kappa] \tau_1. \quad (13)$$

Решение нелинейных уравнений (8), (10) и (13) для определения параметров η_k , σ_k и μ_k , τ_k будем проводить методом последовательных приближений.

В нулевом приближении, полагая $\vartheta_0 = \rho_0 = 1$ (частицы могут проникать до глубины $x=1$, соответствующей полному пробегу S_0) и $\eta_0 = 1$ (согласно граничному условию (11)), имеем

$$J_{\text{неч}}(x) = u_0(x) = (1-x)^{\nu} \exp[-\xi x / (1-x)],$$

$$J_{\text{четн}}(x) = v_0(x) = \mu_0 (1-x)^{\nu} \exp[-\xi x / (1-x)].$$

Определение параметров ξ и ν уже было описано; параметр μ_0 также следует определять из асимптотического условия $\mu_0 = J_n / \varphi_n$, соответствующего моментам большого индекса n .

Рассмотрим решение системы уравнений нечетного распределения (8), например в третьем приближении

$$J_{\text{неч}}(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),$$

причем $u_k(x) = 0$, если $x \geq \vartheta_k$. Положим $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$, $\eta_2 = \eta_3 = 0$ и поделим второе уравнение системы (8) на первое, тогда имеем

$$\sigma_1 = \frac{(J_3 - \varphi_3 - \eta_2 \sigma_2^2 \varphi_3 - \eta_3 \sigma_3^2 \varphi_3)}{(J_1 - \varphi_1 - \eta_2 \sigma_2 \varphi_3 - \eta_3 \sigma_3 \varphi_4)} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_4},$$

откуда находим σ_1 . Если значения σ_1 в процессе счета выходят за пределы интервала (0, 1), то полагаем $\sigma_1 = 1$, т. е. снимаем вырождение двойного ряда. Зная σ_1 , из первого уравнения (8) находим

$$\eta_1 = (J_1 - \varphi_1 - \eta_2 \sigma_2 \varphi_3 - \eta_3 \sigma_3 \varphi_4) / (\sigma_1 \varphi_2).$$

Подобным образом, считая σ_1 и η_1 известными, из третьего и четвертого уравнения системы (8) определяем σ_2 и η_2 ; затем, считая $\sigma_1, \eta_1, \sigma_2, \eta_2$ найденными, находим σ_3 и η_3 . Теперь мы можем сравнить полученное значение η_3 с первоначальным (в данном случае начальное значение η_3 было выбрано равным нулю) и вернуться к определению σ_1 , но уже при новых значениях параметров $\sigma_2, \eta_2, \sigma_3, \eta_3$. Эта процедура повторяется до тех пор, пока разница между предыдущим и последующим значениями η_3 не окажется меньше заданной.

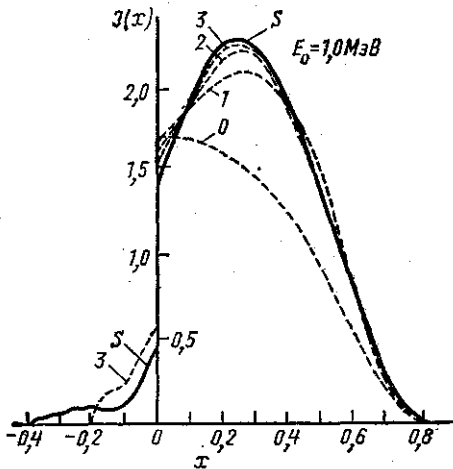


Рис. 1

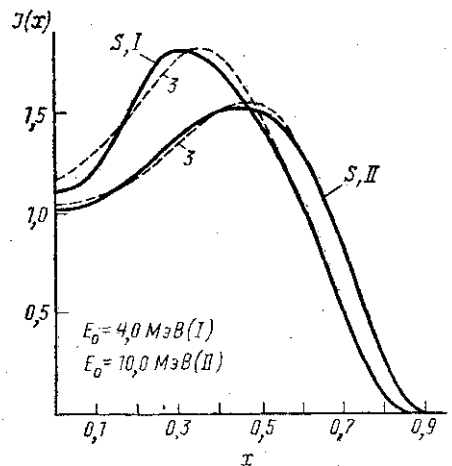


Рис. 2

Решение системы уравнений моментов четного распределения (10) и (13) следует той же процедуре, что и нечетного распределения, но здесь есть одна особенность, связанная с уравнением (13). При вы-

числении параметров $\tau_1, \mu_1, \tau_2, \mu_2, \dots$ параметр μ_0 должен оставаться фиксированным (сравните с нечетным распределением), например, равным значению нулевого приближения, а после того как получены все значения параметров четного распределения $\tau_1, \mu_1, \tau_2, \mu_2, \tau_3, \mu_3$, определяется новое значение μ_0 из уравнения

$$\mu_0 = \{J_0 - [(v + \xi)\mu_0 - \alpha] \tau_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_2 - \mu_3 \Phi_3\} / \Phi_0, \quad (14)$$

которое получается подстановкой в первое уравнение системы (10) условия (13). Новое значение μ_0 сравнивается с предыдущим; если разница между ними превышает некоторую заданную погрешность в определении параметров, то новое значение μ_0 подставляется в формулу для вычисления τ_1 , и счет продолжается до получения необходимой точности.

Как видим, в определении параметров нечетного и четного распределений в принципе нет ограничения каким-либо k -м приближением, и расчет может быть проведен до любой степени точности. Для этого в расчете должны участвовать моменты все более высокого порядка, а сами моменты вычисляться с большей точностью.

Вышеописанный метод восстановления функции по ее моментам был применен для вычисления распределения по глубине облучения ионизационных потерь энергии в алюминии электронным пучком с начальными энергиями $E_0 = 0,1; 1; 4$ и 10 МэВ. Значения моментов J_n до $n=12$, являющиеся исходными данными для расчета, были взяты из таблиц Спенсера [8]. На рис. 1 приведены распределения до третьего приближения, а также кривая, рассчитанная Спенсером [8], для начальной энергии электронов $E_0 = 1,0$ МэВ. Там же показано обратное

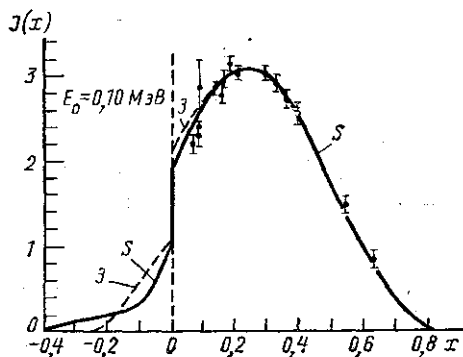


Рис. 3

распределение ($x < 0$), вычисленное Спенсером и нами (в третьем приближении). Из приведенных данных видно, что для прямого распределения имеет место почти полное совпадение результатов, в то время как для обратного распределения имеется заметное расхождение. На рис. 2 представлено наше распределение в третьем приближении и спенсеровское для энергий $E_0 = 4$ и 10 МэВ. Обратные распределения при таких больших энергиях малы и поэтому на рисунке не показаны. Наконец, рис. 3 представляет собой заимствованный график из работы Спенсера [8], где (для энергии $E_0 = 0,1$ МэВ) приводится сравнение вычисленной Спенсером кривой с экспериментальными данными. На этот рисунок нанесено и наше распределение в третьем приближении.

Автор выражает благодарность Н. Ф. Нелипе и Г. Г. Соловьеву за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lewis H. W. Multiple scattering in an infinite medium.— Phys. Rev., 1950, 78, p. 526—529. [2] Spencer L. V. Theory of electron penetration.— Phys. Rev., 1955, 98, p. 1597—1615. [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1973, с. 212—213. [4] Huffman F. N., Cheka J. S., Saunders V. G., Ritchie R. H., Birkhoff B. D. Spatial distribution of energy absorbed from an electron beam penetrating aluminium.— Phys. Rev., 1957, 106, p. 435—440. [5] Adawi I. Penetration of electron beams into water below the critical energy.—

Phys. Rev., 1957, 107, p. 1476—1482. [6] Юрков Б. Я. Теория пространственного распределения радиационных нарушений кристаллической решетки кремния при облучении моноэнергетическим пучком электронов.— ФТТ, 1959, 1, с. 696—704. [7] Юрков Б. Я. Теория проникновения быстрых протонов в твердое тело.— ФТТ, 1968, 10, с. 47—55. [8] Sprenger L. V. Energy dissipation by fast electrons. Washington, NBS, 1959, Monograph 1.

Поступила в редакцию
02.10.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 65—50

ОБЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

Статья посвящена изучению типов траекторий корней большого многообразия линейных и линеаризованных систем (механических, электромеханических и др.), описываемых характеристическим уравнением

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) + K(p + b_1) = 0. \quad (1)$$

Здесь K — линейный свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0 < K < +\infty$ или $-\infty < K < 0$), a_1, a_2, a_3, b_1 — параметры семейства траекторий корней, выражающиеся линейно или нелинейно через параметры системы (постоянные времени и т. д.). В частном случае $b_1 = 0$ это могут быть системы с регулированием по производной.

С помощью преобразований на комплексной плоскости p (сдвига мнимой оси и изменения масштаба), не меняющих типа траекторий корней уравнения (1), семейство корневых годографов, зависящее от четырех параметров a_1, a_2, a_3, b_1 , может быть изучено в зависимости от двух параметров. Это позволяет на плоскости этих параметров выделить области с разными типами траекторий корней и проследить за изменением типа траекторий корней (1) в зависимости от параметров системы и за изменением корней (1) при фиксированных значениях его коэффициентов от свободного параметра K [1].

В [2—4] приведены примеры типов траекторий корней (1), однако их анализа не дано. Исследуя различные типы корневых годографов, можно установить общие динамические свойства систем, описываемых (1), и использовать это для более целенаправленного их синтеза.

Соотношения между параметрами, определяющие тип траекторий корней (1), могут быть получены из уравнения возможных кратных точек [5], которыми определяется тип корневого годографа [2] (по дискриминанту уравнения третьей степени).

Производя в (1) замену $p = u - (1/3)a_1$, означающую сдвиг мнимой оси комплексной плоскости p влево на величину $(1/3)a_1$, получим

$$(u^3 \pm r^2 u + q) + K(u + l) = 0, \quad (2)$$

где

$$r^2 = \left| a_2 - \frac{1}{3} a_1^2 \right|, \quad q = a_3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{2}{27} a_1^3, \quad l = b_1 - \frac{1}{3} a_1, \quad (3)$$

а знак перед r^2 определяется знаком выражения $a_2 - (1/3)a_1^2$.

В зависимости от величины $a_2 - (1/3)a_1^2 \cong 0$ рассмотрим возможные три случая. Соответствующие этим случаям типы траекторий корней