

Phys. Rev., 1957, 107, p. 1476—1482. [6] Юрков Б. Я. Теория пространственного распределения радиационных нарушений кристаллической решетки кремния при облучении моноэнергетическим пучком электронов.—ФТТ, 1959, 1, с. 696—704. [7] Юрков Б. Я. Теория проникновения быстрых протонов в твердое тело.—ФТТ, 1968, 10, с. 47—55. [8] Spencer L. V. Energy dissipation by fast electrons. Washington, NBS, 1959, Monograph 1.

Поступила в редакцию
02.10.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 65—50

ОБЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

Статья посвящена изучению типов траекторий корней большого многообразия линейных и линеаризованных систем (механических, электромеханических и др.), описываемых характеристическим уравнением

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) + K(p + b_1) = 0. \quad (1)$$

Здесь K — линейный свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0 < K < +\infty$ или $-\infty < K < 0$), a_1, a_2, a_3, b_1 — параметры семейства траекторий корней, выражающиеся линейно или нелинейно через параметры системы (постоянные времени и т. д.). В частном случае $b_1 = 0$ это могут быть системы с регулированием по производной.

С помощью преобразований на комплексной плоскости p (сдвига мнимой оси и изменения масштаба), не меняющих типа траекторий корней уравнения (1), семейство корневых годографов, зависящее от четырех параметров a_1, a_2, a_3, b_1 , может быть изучено в зависимости от двух параметров. Это позволяет на плоскости этих параметров выделить области с разными типами траекторий корней и проследить за изменением типа траекторий корней (1) в зависимости от параметров системы и за изменением корней (1) при фиксированных значениях его коэффициентов от свободного параметра K [1].

В [2—4] приведены примеры типов траекторий корней (1), однако их анализа не дано. Исследуя различные типы корневых годографов, можно установить общие динамические свойства систем, описываемых (1), и использовать это для более целенаправленного их синтеза.

Соотношения между параметрами, определяющие тип траекторий корней (1), могут быть получены из уравнения возможных кратных точек [5], которыми определяется тип корневого годографа [2] (по дискриминанту уравнения третьей степени).

Производя в (1) замену $p = u - (1/3)a_1$, означающую сдвиг мнимой оси комплексной плоскости p влево на величину $(1/3)a_1$, получим

$$(u^3 \pm r^2 u + q) + K(u + l) = 0, \quad (2)$$

где

$$r^2 = \left| a_2 - \frac{1}{3} a_1^2 \right|, \quad q = a_3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{2}{27} a_1^3, \quad l = b_1 - \frac{1}{3} a_1, \quad (3)$$

а знак перед r^2 определяется знаком выражения $a_2 - (1/3)a_1^2$.

В зависимости от величины $a_2 - (1/3)a_1^2 \cong 0$ рассмотрим возможные три случая. Соответствующие этим случаям типы траекторий корней

даны в таблице. Крестиками показано положение начальных точек ($K=0$), а кружками — предельной точки ($K=\pm\infty$). Одной стрелкой отмечены нечетные траектории, на которых $K>0$, двумя — четные, на которых $K<0$.

1. Если $a_2 - (1/3)a_1^2 = 0$, то $r=0$ и уравнение (2) принимает вид

$$(u^3 + q) + K(u + l) = 0, \tag{4}$$

где

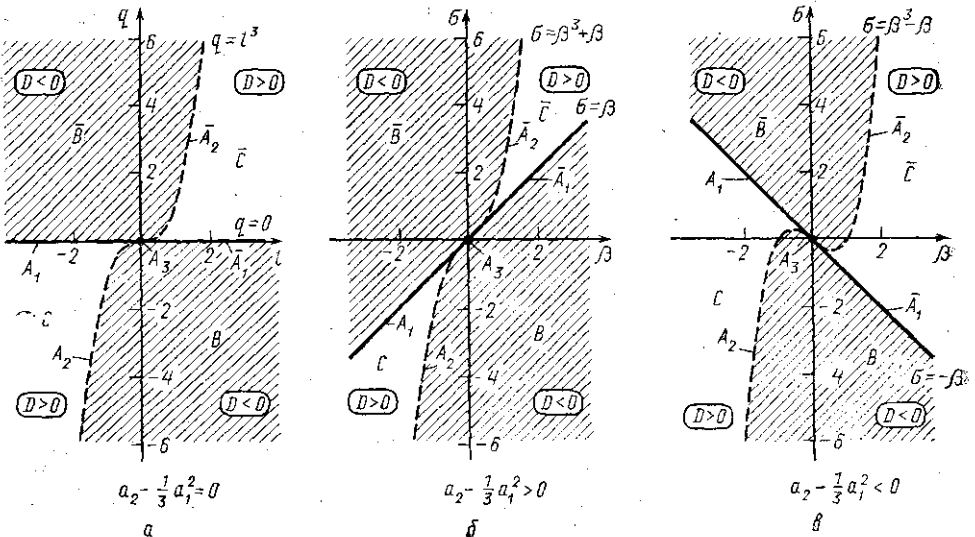
$$q = a_3 - \frac{1}{27}a_1^3, \quad l = b_1 - \frac{1}{3}a_1 \tag{5}$$

— параметры семейства траекторий корней (4) на комплексной плоскости u .

Как известно [5], уравнение возможных кратных точек уравнения (4) имеет вид

$$2u^3 + 3lu^2 - q = 0. \tag{6}$$

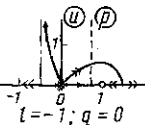
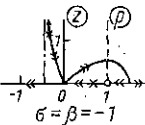
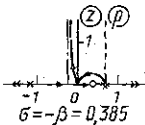
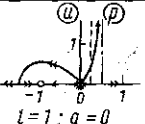
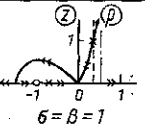
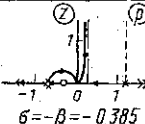
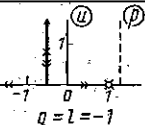
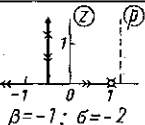
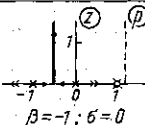
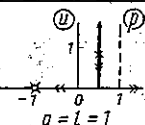
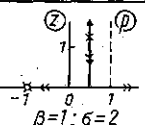
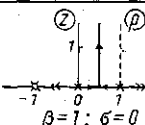
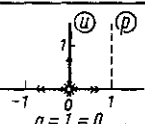
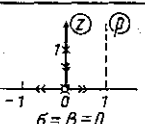
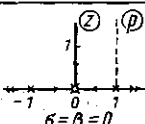
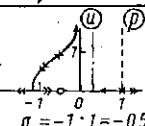
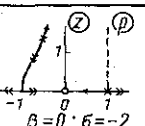
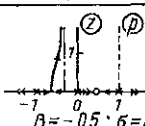
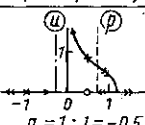
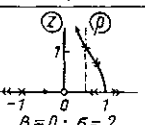
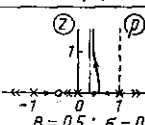
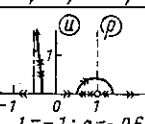
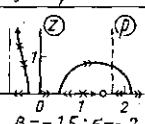
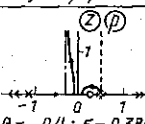
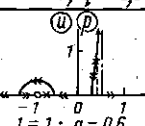
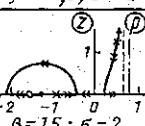
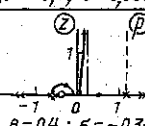
Исследуя дискриминант $D = (27/4)q(l^3 - q) \cong 0$ уравнения (6) от параметров l и q , получим информацию о возможных типах траекторий корней. На плоскости параметров семейства (l, q) выделим области, определяющие различные типы траекторий корней.



1. При $D=0$ имеем $q=0, q=l^3$, а также $q=l=0$. На плоскости (l, q) (рисунок, а) построены эти кривые. Они определяют граничные типы траекторий корней. Рассмотрим их более подробно.

При $q=0$ ($l \neq 0$) уравнение (6) имеет двукратный корень $u_{1,2} = 0$ и $u_3 = -(3/2)l$, а траектории корней уравнения (4) на комплексной плоскости u — трехкратную начальную точку в начале координат и двукратную точку, равную $-(3/2)l$. Эта двукратная точка при $-\infty < l < 0$ располагается правее трехкратной точки (тип траекторий корней A_1 в таблице), а при $0 < l < +\infty$ — левее трехкратной точки (тип траекторий \bar{A}_1). Корневые годографы A_1 и \bar{A}_1 являются зеркально-симметричными относительно мнимой оси комплексной плоскости u .

При $q=l^3$ ($l \neq 0$) корни уравнения (6) равны $u_{1,2} = -l$ и $u_3 = (1/2)l$. Однако двойной корень $u_{1,2}$ не является трехкратной точкой уравнения

Дискри- миант	Тип траектории	$a_2 - \frac{1}{3}a_1^2 = 0$		$a_2 - \frac{1}{3}a_1^2 > 0$		$a_2 - \frac{1}{3}a_1^2 < 0$	
		Область значений	Численный пример	Область значений	Численный пример	Область значений	Численный пример
D = 0.	A ₁	$q = 0,$ $-\infty < l < 0$		$\sigma = \beta,$ $-\infty < \beta < 0$		$\sigma = -\beta,$ $-\infty < \beta < 0$	
	Ā ₁	$q = 0,$ $0 < l < +\infty$		$\sigma = \beta,$ $0 < \beta < +\infty$		$\sigma = -\beta,$ $0 < \beta < +\infty$	
	A ₂	$q = l^3,$ $-\infty < l < 0$		$\sigma = \beta^3 + \beta,$ $-\infty < \beta < 0$		$\sigma = \beta^3 - \beta,$ $-\infty < \beta < 0$	
	Ā ₂	$q = l^3,$ $0 < l < +\infty$		$\sigma = \beta^3 + \beta,$ $0 < \beta < +\infty$		$\sigma = \beta^3 - \beta,$ $0 < \beta < +\infty$	
	A ₃	$q = 0,$ $l = 0$		$\sigma = 0,$ $\beta = 0$		$\sigma = 0,$ $\beta = 0$	
D < 0	B	$q < 0,$ $q < l^3$		$\sigma < \beta,$ $\sigma < \beta^3 + \beta$		$\sigma < -\beta,$ $\sigma < \beta^3 - \beta$	
	B̄	$q > 0,$ $q > l^3$		$\sigma > \beta,$ $\sigma > \beta^3 + \beta$		$\sigma > -\beta,$ $\sigma > \beta^3 - \beta$	
D > 0	C	$l^3 < q < 0$		$\beta^3 + \beta < \sigma < \beta$		$\beta^3 - \beta < \sigma < -\beta$	
	C̄	$0 < q < l^3$		$\beta < \sigma < \beta^3 + \beta$		$-\beta < \sigma < \beta^3 - \beta$	

(4). Для одноконтурных систем он соответствует компенсации полюса передаточной функции нулем, о чем будет сказано ниже. Для многоконтурных систем, когда нуль не совпадает с предельной точкой, один из корней (4) не зависит от K и равен $u_{1,2}$. В этом легко убедиться, представив (4) в виде $(u+l)[(u^2-ul+l^2)+K]=0$. Корень u_3 являет-

ся двукратной точкой траекторий корней уравнения (4). Эта двукратная точка при $-\infty < l < 0$ располагается левее совпадающих начальной и предельной точек (тип траекторий A_2), а при $0 < l < +\infty$ — правее (тип траекторий \bar{A}_2).

В частном случае $l=q=0$ уравнение (6) имеет тройной корень $u_{1,2,3}=0$, а траектории корней уравнения (4) — трехкратную начальную точку, совпадающую с предельной точкой (тип траекторий A_3).

Типы траекторий A_2 , \bar{A}_2 и A_3 являются вырожденными.

2. Если $D < 0$, то один из корней (6) действительный, а два других — комплексно-сопряженные. Уравнение третьей степени (4) не может иметь двукратных комплексно-сопряженных корней, поэтому траектории корней имеют одну действительную двукратную точку. Условие $D < 0$ выполняется, если $q < 0$, $q < l^3$ (тип траекторий корней B) или $q > 0$, $q > l^3$ (зеркальный B -тип траекторий корней \bar{B}). На плоскости (l, q) эти области отмечены штриховкой (рисунок, а), а соответствующие типы траекторий корней даны в таблице.

3. Если $D > 0$, то все три корня уравнения (6) — различные действительные, и поэтому траектории корней уравнения (4) имеют три двукратные точки. Условие $D > 0$ выполняется при $l^3 < q < 0$ (тип траекторий C) или $0 < q < l^3$ (зеркальный C -тип траекторий корней \bar{C}). На плоскости (l, q) отмечены эти области (рисунок, а), а соответствующие типы траекторий корней даны в таблице.

2. Пусть теперь $a_2 - (1/3)a_1^2 \neq 0$, т. е. $r \neq 0$. Производя в (2) подстановку $u = |r|z$, изменяющую масштаб комплексной плоскости u , получим

$$(z^3 \pm z + \sigma) + \rho(z + \beta) = 0, \quad (7)$$

где $\rho = K/r^2$ — новый свободный параметр, а

$$\sigma = q/|r|^3, \quad \beta = l/|r| \quad (8)$$

— параметры семейства траекторий корней (7) на комплексной плоскости z , вычисляющиеся с учетом (3). Знак плюс перед z в (7) соответствует случаю $a_2 - (1/3)a_1^2 > 0$, а знак минус $a_2 - (1/3)a_1^2 < 0$.

Уравнение возможных кратных точек уравнения (7) имеет вид

$$2z^3 + 3\beta z^2 + (\pm\beta - \sigma) = 0. \quad (9)$$

Аналогично предыдущему случаю, исследуя дискриминант

$$D = \frac{27}{4} (\sigma \mp \beta) (\beta^3 \pm \beta - \sigma) \gtrless 0$$

уравнения (9) от параметров β и σ , на плоскости (β, σ) можно выделить области, определяющие различные типы траекторий корней (рисунок, б при $a_2 - (1/3)a_1^2 > 0$ и рисунок, в при $a_2 - (1/3)a_1^2 < 0$). Границами, разделяющими области плоскости (β, σ) с различными типами траекторий корней, являются прямая $\sigma = \pm\beta$, которая определяет типы траекторий корней с трехкратной точкой, и кривая $\sigma = \beta^3 \pm \beta$, которая определяет вырожденные типы траекторий корней (с совпадающими начальной и предельной точками). Корневые годографы различных типов при $a_2 - (1/3)a_1^2 > 0$ и $a_2 - (1/3)a_1^2 < 0$ даны в таблице. Здесь же указаны соотношения между β и σ , определяющие типы траекторий корней.

Рассмотренные выше типы траекторий корней на комплексных плоскостях u и z определяют всевозможные типы траекторий корней (1). Одинаковые по конфигурации типы корневых годографов (1) при

различных соотношениях $a_2 - (1/3)a_1^2 \cong 0$ расположены на одной строке таблицы. Они могут отличаться характером расположения начальных точек, отмеченных крестиками.

Это позволяет по коэффициентам характеристического уравнения (1) a_1, a_2, a_3, b_1 представить вид корневого годографа на комплексной плоскости p без непосредственного его построения с помощью уравнений траекторий корней [5]. Для этого при $a_2 - (1/3)a_1^2 = 0$ вычисляем значения l и q по формулам (5), а при $a_2 - (1/3)a_1^2 \neq 0$ — значения β и σ по формулам (8), (3). Используя рисунок и таблицу, находим вид корневого годографа на комплексной плоскости u или z . Затем переходим к комплексной плоскости p , сдвигая мнимую ось влево на величину $(1/3)a_1$, предварительно изменив масштаб комплексной плоскости z в $|r|$ раз. Построив полный корневой годограф (1), можно проследить за изменением корней от свободного параметра K [1].

Аналогичным образом можно исследовать влияние различных параметров системы (например, параметров корректирующей цепи) на тип корневого годографа (1) и выбрать наиболее подходящие значения параметров системы и свободного параметра K .

Знание типов траекторий корней на комплексных плоскостях u и z позволяет судить об общих свойствах систем, описываемых характеристическим уравнением (1) (систем класса $\{3; 1\}$). Для этого проанализируем корневые годографы, данные в таблице, где положение мнимой оси комплексной плоскости p обозначено пунктиром и для простоты положено $|r| = 1$.

При заданном уравнении (1) нам известна асимптотика корневого годографа [5]. Центр асимптот находится по формуле

$$a^* = \frac{-a_1 + b_1}{2},$$

а комплексно-сопряженные асимптоты параллельны мнимой оси (штрих-пунктирные линии в таблице). Следовательно, системы класса $\{3; 1\}$ могут быть абсолютно устойчивыми, т. е. устойчивыми при $0 < K < +\infty$. Для этого основные точки траекторий корней и центр асимптот a^* должны располагаться в левой полуплоскости p . В частности, абсолютно устойчивыми могут быть системы класса $\{3; 1\}$, содержащие консервативное звено (тип траекторий B при $a_2 - (1/3)a_1^2 > 0$) или два интегрирующих звена (типы траекторий A_1 и C при $a_2 - (1/3)a_1^2 < 0$).

Как видно из таблицы, системы класса $\{3; 1\}$ могут стать неустойчивыми различными способами. Колебательная неустойчивость осуществляется:

1) приближением траекторий корней к вертикальным асимптотам, лежащим в правой полуплоскости p (типы траекторий \bar{A}_1 и \bar{C} при $a_2 - (1/3)a_1^2 \geq 0$) при отрицательной обратной связи ($K > 0$).

2) обходом траекторий корней вокруг предельной точки, лежащей правее всех начальных точек (типы траекторий A_1 и C при $a_2 - (1/3)a_1^2 \geq 0$) при положительной обратной связи ($K < 0$).

Критическая частота определяется по формуле [5]

$$\omega_k^2 = \frac{a_3 - a_2 b_1}{a_1 - b_1},$$

а соответствующее ей значение критического свободного параметра

$$K_k = \frac{a_3 - a_1 a_2}{a_1 - b_1}.$$

Апериодическое возбуждение ввиду возможности расположения предельной точки в правой полуплоскости возможно как при отрицательной, так и при положительной обратной связи.

Значение свободного параметра, при котором система становится аperiодически неустойчивой, определяется по формуле [5]

$$K_a = -\frac{a_3}{b_1}.$$

Соответствующим выбором параметров одноконтурной системы ближайший полюс передаточной функции может быть скомпенсирован нулем (тип траекторий A_2).

Наличие предельной точки обуславливает разные динамические свойства систем с зеркально-симметричными типами траекторий корней.

При отрицательной обратной связи с увеличением K возможно удаление доминирующих корней от мнимой оси (например, тип траекторий \bar{B}). В этом проявляется стабилизирующее действие предельной точки.

Все это позволяет выбрать значения параметров системы и свободного параметра для удовлетворения самых разнообразных требований, предъявляемых к системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Исследование активных линейных систем методом траекторий корней. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 1, с. 60—68. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Методы построения траекторий корней линейных систем и качественного определения типа траекторий. Тр. I Междунар. конгресса ИФАК, т. I.—М.: Изд. АН СССР, 1961, с. 40—48. [3] Yeh V. C. M. The study of transients in linear systems by conformal mapping and the root-locus method.—Trans. of ASME, ser. D, 76, N 3, 1954, p. 349—361. [4] Power H. M. Root loci having a total of four poles and zeros.—IEEE Trans. Automat. Contr., oct., 1971, p. 484—486. [5] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем.—М.: Наука, 1964, 160 с.

Поступила в редакцию
08.10.79

Примечание при корректуре. В таблице подпись под рисунком (левый ряд, 6-я строка сверху) следует читать: $q = -1$; $l = 0,5$.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 621.373.072.9

МНОГОЧАСТОТНЫЕ НЕАВТОНОМНЫЕ РЕЖИМЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

В. В. Карпов, И. И. Минакова

(кафедра физики колебаний)

В настоящей работе рассматриваются многочастотные синхронные режимы и процессы их установления при воздействии на автогенератор ряда гармонических внешних сил. Показано различие выходных спектров и характерных взаимодействий для генераторов с мягким и жестким предельным циклом.

Изучение характера преобразования генератором спектра сложного внешнего сигнала обусловлено рядом практических задач, таких как конструирование устройств с заданными характеристиками на выходе, стабилизация многочастотных режимов, использование синхро-