

Апериодическое возбуждение ввиду возможности расположения предельной точки в правой полуплоскости возможно как при отрицательной, так и при положительной обратной связи.

Значение свободного параметра, при котором система становится аperiodически неустойчивой, определяется по формуле [5]

$$K_a = -\frac{a_3}{b_1}.$$

Соответствующим выбором параметров одноконтурной системы ближайший полюс передаточной функции может быть скомпенсирован нулем (тип траекторий  $A_2$ ).

Наличие предельной точки обуславливает разные динамические свойства систем с зеркально-симметричными типами траекторий корней.

При отрицательной обратной связи с увеличением  $K$  возможно удаление доминирующих корней от мнимой оси (например, тип траекторий  $B$ ). В этом проявляется стабилизирующее действие предельной точки.

Все это позволяет выбрать значения параметров системы и свободного параметра для удовлетворения самых разнообразных требований, предъявляемых к системе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Исследование активных линейных систем методом траекторий корней. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 1, с. 60—68. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Методы построения траекторий корней линейных систем и качественного определения типа траекторий. Тр. I Междунар. конгресса ИФАК, т. 1.—М.: Изд. АН СССР, 1961, с. 40—48. [3] Yeh V. C. M. The study of transients in linear systems by conformal mapping and the root-locus method.—Trans. of ASME, ser. D, 76, N 3, 1954, p. 349—361. [4] Power H. M. Root loci having a total of four poles and zeros.—IEEE Trans. Automat. Contr., oct., 1971, p. 484—486. [5] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем.—М.: Наука, 1964, 160 с.

Поступила в редакцию  
08.10.79

*Примечание при корректуре.* В таблице подпись под рисунком (левый ряд, 6-я строка сверху) следует читать:  $q = -1$ ;  $l = 0,5$ .

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 621.373.072.9

#### МНОГОЧАСТОТНЫЕ НЕАВТОНОМНЫЕ РЕЖИМЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

В. В. Карпов, И. И. Минакова

(кафедра физики колебаний)

В настоящей работе рассматриваются многочастотные синхронные режимы и процессы их установления при воздействии на автогенератор ряда гармонических внешних сил. Показано различие выходных спектров и характерных взаимодействий для генераторов с мягким и жестким предельным циклом.

Изучение характера преобразования генератором спектра сложного внешнего сигнала обусловлено рядом практических задач, таких как конструирование устройств с заданными характеристиками на выходе, стабилизация многочастотных режимов, использование синхро-

низированного генератора в качестве элемента приемного тракта. Изучение воздействия на генератор модулированного сигнала в рамках известных методов требовало наложения весьма жестких требований на параметры сигнала (ширина спектра сигнала меньше полосы захвата, частота несущей близка к частоте автономных колебаний генератора) [1, 2]. Ослабление этих условий приводило к сильному искажению сигнала на выходе. При этом, в частности, возможно возникновение областей синхронизации боковыми частотами спектра модулированного сигнала [2, 3]. С разработкой метода спектральных составляющих [4, 5] появилась возможность решить более общую задачу о многочастотном воздействии на генератор.

Рассмотрим воздействие на генератор  $N$  гармонических внешних сил сравнимых амплитуд с частотами, близкими к основному тону генератора. Уравнение движения при кубической аппроксимации, характеристики нелинейного активного элемента в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + 2\delta(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \sum_{j=1}^N P_j \cos \omega_j t, \quad (1)$$

где

$$|\omega_j^2 - \omega_0^2| \ll \omega_0^2, \quad \delta(x) = \delta_0 + \delta_2 x^2, \quad \delta_0 < 0, \quad \delta_2 > 0.$$

Обозначим полуширину полосы синхронизации генератора одной из этих сил  $P_j$  в отсутствие других через  $\Delta_{0j}$ , а расстояние между частотами  $\omega_j$  и  $\omega_k$  внешних сил  $P_j$  и  $P_k$  через  $\Omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$ . Практический интерес представляет случай, когда хотя бы одна из внешних сил, например  $P_j$ , находится в своей полосе синхронизации генератора  $|\Delta_j| = |\omega_j - \omega_0| \leq \Delta_{0j}$ . При  $|\Omega_{jk}| \gg 2\Delta_{0j}$  ( $k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N$ ) воздействие на синхронизированный силой  $P_j$  генератор остальных внешних сил приводит лишь к асинхронному уменьшению амплитуды компоненты спектра с частотой синхронизации. Уменьшение расстроек между частотами внешних сил до значений, сравнимых с  $\Delta_{0j}$ , требует учета комбинационного взаимодействия тех сил, частоты которых попадают в полосу пропускания генератора или достаточно близки к ней.

Частоты спектра колебания генератора в первом приближении являются элементами матрицы  $\|\omega_{jk}\|$ , где  $\omega_{jj} \equiv \omega_j$ ,  $\omega_{jk} \equiv \omega_j + \Omega_{jk} = 2\omega_j - \omega_k$ . Решение уравнения (1) при этом следует искать в виде

$$x = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [z_{jk} e^{i\omega_{jk}t} - z_{jk}^* e^{-i\omega_{jk}t}]. \quad (2)$$

В случае  $|\Omega_{j,j+1}|, |\Omega_{j,j-1}| \ll 2\Delta_{0j}$ , по крайней мере в интервале расстроек  $[-\Delta_{0j}, \Delta_{0j}]$ , можно ограничиться рассмотрением воздействия на генератор двух внешних сил:  $P_{j-1}$  и  $P_{j+1}$ . Частоты других внешних сил полагаем выходящими за полосу генератора. Вдали от  $\omega_j$  они оказывают лишь асинхронное воздействие, приводящее к уменьшению амплитуд компонент спектра. Таким образом, в выражениях для воздействия (правая часть уравнения (1)) и для решения (2) можно ограничиться  $N=3$ . Частоты  $\omega_{j-1,j+1}$  и  $\omega_{j+1,j-1}$  так же далеки от  $\omega_j$ , как и  $\omega_{j-2}, \omega_{j+2}$ , поэтому разумно положить  $|z_{j-1,j+1}| = |z_{j+1,j-1}| \equiv 0$ .

Пользуясь методикой, описанной в работах [4, 5], получим систему укороченных уравнений для компонент спектра колебания генератора:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{jj}}{dt} &= (i\Delta_{jj} - \delta - \delta_0) z_{jj} - \frac{\delta_2}{4} (Z_{jj} z_{jj} + z_{22}^2 z_{jj}^* + 2z_{22}^* z_{j2} z_{2j} + \\
&\quad + 2z_{jj}^* z_{22} z_{j2}) + \frac{\omega_0^2 P_j}{2\omega_j}, \\
\frac{dz_{22}}{dt} &= (i\Delta_{22} - \delta - \delta_0) z_{22} - \frac{\delta_2}{4} \left[ Z_{22} z_{22} + \sum_{j=1,3} (z_{jj}^2 z_{j2}^* + \right. \\
&\quad \left. + 2z_{jj}^* z_{2j} z_{j2} + 2z_{22}^* z_{jj} z_{2j}) \right] + \frac{\omega_0^2 P_2}{2\omega_2}, \quad (3) \\
\frac{dz_{kl}}{dt} &= (i\Delta_{kl} - \delta - \delta_0) z_{kl} - \frac{\delta_2}{4} (Z_{kl} z_{kl} + 2z_{kk}^2 z_{ll}^* + 2z_{kk}^* z_{ll} z_{ik}),
\end{aligned}$$

где  $j=1, 3$ ;  $k$  и  $l$  — попарно меняющиеся индексы ( $k=1, l=2$ ;  $k=2, l=1$ ;  $k=3, l=2$ ;  $k=2, l=3$ );  $\Delta_{jk} = \omega_{jk} - \omega_0$ ;

$$Z_{kl} = 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (z_{kl}^* z_{kl}) - z_{kl}^* z_{kl}, \quad (z_{13} = z_{31} = 0).$$

Изучение процессов, описываемых системой укороченных уравнений (3), целесообразно проводить путем анализа решений, полученных при численном интегрировании (3) по методу Рунге-Кутты.

Для выяснения взаимодействия колебаний при многочастотном воздействии нужно рассмотреть два случая: 1) расстройки между частотами внешних сил  $\Omega_{21}$  и  $\Omega_{32}$  фиксированы, и вся тройка частот изменяется в некоторой области около  $\omega_0 = \text{const}$ ; 2) расстройки частот внешних сил  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_j = \Delta_j / \omega_0$ ) фиксированы, а частота  $\omega_3$  изменяется в некоторой области вблизи  $\omega_0 = \text{const}$ .

Типичные расчетные параметры генератора:

$$\delta/\omega_0 = 0,008; \quad \delta_0/\omega_0 = -0,024; \quad \delta_2/\omega_0 = 0,003 \text{ 1/B}^2. \quad (4)$$

Амплитуды внешних сил  $P_1 = P_2 = P_3 = 0,02 A_0$  и  $0,005 A_0$  ( $A_0 = 2\sqrt{-\delta_0/\delta_2}$  — амплитуда автономных колебаний генератора). В первом случае  $\Omega_{21}$  и  $\Omega_{32}$  выбирались такими, чтобы полосы синхронизации генератора каждой из внешних сил по отдельности перекрывались:  $\Omega_{21} = 1,95 \Delta_0$ ,  $\Omega_{32} = 1,3 \Delta_0$ .

Зависимость амплитуд компонент спектра  $a_{jk} = \sqrt{z_{jk} z_{jk}^*} / A_0$  от  $\sigma_2$  для мягкого предельного цикла [6, 7], представленная на рис. 1, показывает, что генератор синхронизируется той из внешних сил, частота которой ближе к  $\omega_0$ . Поведение амплитуд спектральных составляющих с комбинационными частотами существенно зависит от расстроек этих частот относительно частоты автономных колебаний: чем больше расстройка, тем меньше амплитуда комбинационной составляющей. Именно поэтому в области  $-0,5 < \sigma_2 < 0,8$  амплитуды  $a_{32}$ ,  $a_{12}$  много меньше амплитуд остальных компонент спектра. Поскольку  $|\sigma_{13}|$ ,  $|\sigma_{31}| \gg |\sigma_{32}|$ ,  $|\sigma_{12}|$ , наши предположения  $a_{13} = a_{31} = 0$  оправданы.

Для выделения вкладов комбинационного и асинхронного взаимодействий в результирующие амплитуды компонент спектра в системе укороченных уравнений (3) был проведен расчет без учета перекрестных членов, отвечающих комбинационному взаимодействию. Расчет проделан для области синхронизации генератора силой  $P_2$ . Значения

амплитуды  $a_2$  в этой области уменьшились (пунктирная кривая на рис. 1), а значения  $a_1$  и  $a_3$  практически не отличаются от значений, полученных при учете обоих типов нелинейных взаимодействий. Таким образом, комбинационное взаимодействие, приводящее к появлению

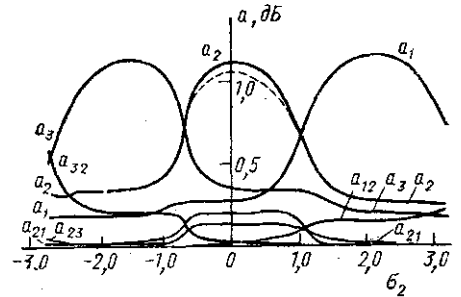


Рис. 1. Зависимости стационарных амплитуд компонент спектра от  $\sigma_2$  при трехчастотном воздействии на автогенератор

нию дополнительных компонент в спектре колебаний генератора, не снижает амплитуду компоненты с частотой синхронизации, что казалось бы естественным из-за перекачки энергии на комбинационные частоты, а наоборот, увеличивает ее. Этот эффект обусловлен нелинейным механизмом взаимодействия колебаний разных частот в генераторе и обеспечивается за счет более полного использования источника питания нелинейного активного элемента при мягком предельном цикле.

При одновременном уменьшении амплитуд или при увеличении жесткости предельного цикла характер зависимости амплитуд всех компонент спектра остается прежним. Однако происходит более сильное ограничение амплитуд комбинационных компонент спектра и гораздо меньшее изменение амплитуд с частотами внешних сил внутри своих полос синхронизации генератора.

Следует отметить, что при увеличении числа действующих на генератор внешних сил от 3 до  $N$ , расстройки между частотами которых фиксированы, амплитуды компонент спектра с частотами внешних сил  $\omega_k$  ( $k > j+1$ ,  $k < j-1$ ) в полосе синхронизации силой  $P_j$  значительно меньше  $a_j$ ,  $a_{j-1}$ ,  $a_{j+1}$ , амплитуды компонент спектра с комбинационными частотами вида  $\omega_{jk}$  ( $k > j+1$ ,  $k < j-1$ ) практически равны нулю.

Рассмотрение взаимодействия колебаний при трехчастотном воздействии было проведено и в случае, когда на автоколебательную систему в многочастотном режиме (частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  фиксированы) действует сила  $P_3$  с частотой, изменяющейся как в полосе, так и вне своей полосы синхронизации. Зависимости амплитуд компонент спектра от  $\sigma_3$  для генераторов с мягким и жестким предельным циклом приведе-

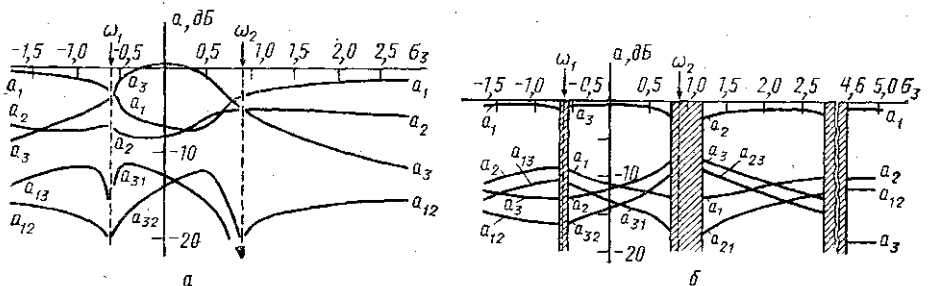


Рис. 2. Зависимости стационарных амплитуд от  $\sigma_3$  для генератора с мягким (а) и жестким (б) предельным циклом ( $\sigma_1 = -0,9$  и  $\sigma_2 = 0,6$ ).

ны на рис. 2 (а и б соответственно). Сравнение этих графиков показывает различный характер ограничения амплитуд компонент спектра колебаний генератора. В генераторе с мягким предельным циклом наибольшую роль играет та внешняя сила, частота которой расположена ближе к  $\omega_0$ . В этом случае асинхронное взаимодействие преобладает над комбинационным: во всей исследованной области амплитуды компонент спектра с частотами внешних сил больше амплитуд комбинационных компонент спектра. При расстройках  $|\sigma_3| \gg 1$  роль силы  $P_3$  значительно уменьшается, и спектр многочастотного синхронного режима стремится к стационарному спектру, каким он был в отсутствие  $P_3$ , т. е. наступает момент, когда  $a_{12}, a_{21} \gg a_3$ . Для автогенератора с жестким предельным циклом характерно преобладание комбинационного взаимодействия над асинхронным. В этом случае две внешние силы с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  вызывают более сильное подтягивание частоты автономных колебаний генератора, чем одна  $\omega_1$ , несмотря на то что  $\omega_1$  расположена ближе к  $\omega_0$ , чем  $\omega_2, \omega_3$ . Действительно, в области  $1,3 < \sigma_3 < 2,8$  значение  $a_2 > a_1$ , хотя  $|\sigma_1| < |\sigma_2|$  (рис. 2, б), в то время как в случае генератора с мягким предельным циклом  $a_2 < a_1$  в этой области.

При изучении процессов установления многочастотного синхронного режима было установлено, что характер и время переходного процесса те же, что и при воздействии внешней силы на синхронизированный другой силой генератор [4, 8]. Появление новых компонент в спектре приводит к перераспределению энергии между всеми компонентами спектра, не вызывая существенного увеличения времени установления стационарного режима.

Экспериментальное исследование многочастотных неавтономных режимов проводилось на различных установках в радиодиапазоне [8, 9]. При этом установка, подробно описанная в [9], была дополнена еще одним сумматором. Для обеспечения равноправия каждой из внешних сил требовались определенные усилия, чтобы получить одинаковые характеристики усилителей-сумматоров в исследуемом диапазоне частот. Проверка равнозначности внешних сил проводилась измерением полосы синхронизации каждой из них в отсутствие двух других. Полосы синхронизации при этом были равны друг другу с точностью до 3%. Сравнение экспериментальных и рассчитанных на ЭВМ зависимостей амплитуд компонент спектра от расстроек показало хорошее качественное подтверждение расчета экспериментом. При нормировке на максимальное значение амплитуды результаты расчета, приведенные на рис. 4 настоящей работы, дают хорошее количественное соответствие с экспериментом работы [8].

Основные выводы из работы следующие.

1. При воздействии на генератор  $N$  гармонических внешних сил, фиксированные расстройки между частотами которых больше или порядка ширины полосы синхронизации генератора каждой из этих сил в отдельности, характер амплитудно-частотных зависимостей в полосе синхронизации одной из них практически полностью определяется параметрами этой силы и двух ближайших к ней.

2. Генератор с мягким предельным циклом синхронизируется той из действующих на него  $N$  равных по амплитуде гармонических внешних сил, расстройка частоты которой относительно  $\omega_0$  меньше расстроек частот остальных сил.

3. Для генераторов с жестким предельным циклом комбинационное взаимодействие преобладает над асинхронным. Это приводит к тому, что при трехчастотном воздействии две внешние силы  $P_2$  и  $P_3$  мо-

гут вызвать сильное подтягивание частоты автономных колебаний, и генератор может быть засинхронизован одной из них, несмотря на то что расстройка частоты третьей силы  $P_1$  относительно  $\omega_0$  существенно меньше.

4. В генераторе с жестким предельным циклом происходит значительное ограничение амплитуд компонент со всеми частотами спектра, кроме частоты синхронизации.

5. Время и характер процессов установления синхронного режима при многочастотном воздействии в основном тот же, что и при бигармоническом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Момот Е. Г. Проблемы и техника синхронного радиоприема.— Л.: Связь, 1961, с. 162. [2] Мартыненко Д. П., Хохлов Р. В. Синхронизация автогенераторов амплитудно-модулированным сигналом.— Радиотехника и электроника, 1957, 2, № 8, с. 127—131. [3] Болозиев В. В., Польских Ю. Е. О воздействии слабо-модулированного ЧМ сигнала на автогенератор.— Изв. вузов. Сер. Радиозлектроника, 1971, 14, № 6, с. 706—707. [4] Карпов В. В., Минакова И. И. Нестационарные процессы при двухчастотном воздействии на автогенератор.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 3, с. 356—359. [5] Карпов В. В. Спектральное исследование полигармонических режимов автогенераторов.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, 19, № 2, с. 24—27. [6] Коваленко А. С., Мигулин В. В. О механизме синхронизации автоколебаний томсоновских систем.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1971, 12, № 3, с. 314—323. [7] Коваленко А. С. Методы приближенного решения задачи о синхронизации томсоновских систем.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1971, 12, № 6, с. 697—709. [8] Абгарян В. В., Карпов В. В., Минакова И. И. Метод дробно-кратной синхронизации гармонических генераторов.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 4, с. 429—435. [9] Вексин С. И., Карпов В. В., Минакова И. И. Синхронные режимы автогенераторов при бигармоническом воздействии.— Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 12, с. 2575—2583.

Поступила в редакцию

12.10.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 539.21:548.316.2

#### ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЯ АНСАМБЛЯ СКОЛЬЗЯЩИХ ДИСЛОКАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ

В. В. Благовещенский, Г. М. Зиненкова, Н. А. Тяпунина, Н. И. Шальнова  
(кафедра молекулярной физики)

**Введение.** В деформированных кристаллах характерными элементами дислокационной структуры являются дислокационные петли и их ансамбли. Дислокационные петли в больших количествах наблюдаются в кристаллах, пересыщенных вакансиями, например в металлах, подвергавшихся действию проникающего излучения. Линейные цепочки дислокационных петель образуются при генерации дислокаций под действием ультразвука [1, 2] или в результате редуцирования диполей [3—5].

Поле напряжения единичной дислокационной петли рассчитывали в работах [6—9]. Знание поля напряжения ансамбля дислокационных петель нужно для оценки вклада этих структур в деформационное упрочнение и представляет собой необходимый этап при изучении развития полос скольжения под действием знакопеременной нагрузки.

Цель настоящей работы — получение выражений для всех компонент тензора напряжений одной петли в форме, удобной для вычис-