

гут вызвать сильное подтягивание частоты автономных колебаний, и генератор может быть засинхронизован одной из них, несмотря на то что расстройка частоты третьей силы  $P_1$  относительно  $\omega_0$  существенно меньше.

4. В генераторе с жестким предельным циклом происходит значительное ограничение амплитуд компонент со всеми частотами спектра, кроме частоты синхронизации.

5. Время и характер процессов установления синхронного режима при многочастотном воздействии в основном тот же, что и при бигармоническом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Момот Е. Г. Проблемы и техника синхронного радиоприема.— Л.: Связь, 1961, с. 162. [2] Мартыненко Д. П., Хохлов Р. В. Синхронизация автогенераторов амплитудно-модулированным сигналом.— Радиотехника и электроника, 1957, 2, № 8, с. 127—131. [3] Болозиев В. В., Польских Ю. Е. О воздействии слабо-модулированного ЧМ сигнала на автогенератор.— Изв. вузов. Сер. Радиозлектроника, 1971, 14, № 6, с. 706—707. [4] Карпов В. В., Минакова И. И. Нестационарные процессы при двухчастотном воздействии на автогенератор.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 3, с. 356—359. [5] Карпов В. В. Спектральное исследование полигармонических режимов автогенераторов.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, 19, № 2, с. 24—27. [6] Коваленко А. С., Мигулин В. В. О механизме синхронизации автоколебаний томсоновских систем.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1971, 12, № 3, с. 314—323. [7] Коваленко А. С. Методы приближенного решения задачи о синхронизации томсоновских систем.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1971, 12, № 6, с. 697—709. [8] Абгарян В. В., Карпов В. В., Минакова И. И. Метод дробно-кратной синхронизации гармонических генераторов.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, 17, № 4, с. 429—435. [9] Вексин С. И., Карпов В. В., Минакова И. И. Синхронные режимы автогенераторов при бигармоническом воздействии.— Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 12, с. 2575—2583.

Поступила в редакцию

12.10.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 5

УДК 539.21:548.316.2

#### ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЯ АНСАМБЛЯ СКОЛЬЗЯЩИХ ДИСЛОКАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ

В. В. Благовещенский, Г. М. Зиненкова, Н. А. Тяпунина, Н. И. Шальнова  
(кафедра молекулярной физики)

**Введение.** В деформированных кристаллах характерными элементами дислокационной структуры являются дислокационные петли и их ансамбли. Дислокационные петли в больших количествах наблюдаются в кристаллах, пересыщенных вакансиями, например в металлах, подвергавшихся действию проникающего излучения. Линейные цепочки дислокационных петель образуются при генерации дислокаций под действием ультразвука [1, 2] или в результате редуцирования диполей [3—5].

Поле напряжения единичной дислокационной петли рассчитывали в работах [6—9]. Знание поля напряжения ансамбля дислокационных петель нужно для оценки вклада этих структур в деформационное упрочнение и представляет собой необходимый этап при изучении развития полос скольжения под действием знакопеременной нагрузки.

Цель настоящей работы — получение выражений для всех компонент тензора напряжений одной петли в форме, удобной для вычис-

лений на ЭВМ, и расчет поля напряжений линейной цепочки скользящих дислокационных петель.

**§ 1. Модель ансамбля дислокационных петель.** Для расчета поля напряжения была выбрана модель тонкой структуры полосы скольжения в виде линейной цепочки дислокаций. Ансамбль дислокационных петель располагался вдоль оси  $x$  и состоял из произвольного числа круговых скользящих петель радиуса  $a$  с расстоянием между центрами  $3a$ . Вектор Бюргерса дислокационных петель был взят вдоль положительного направления оси  $x$ . Отметим, что такой выбор направ-

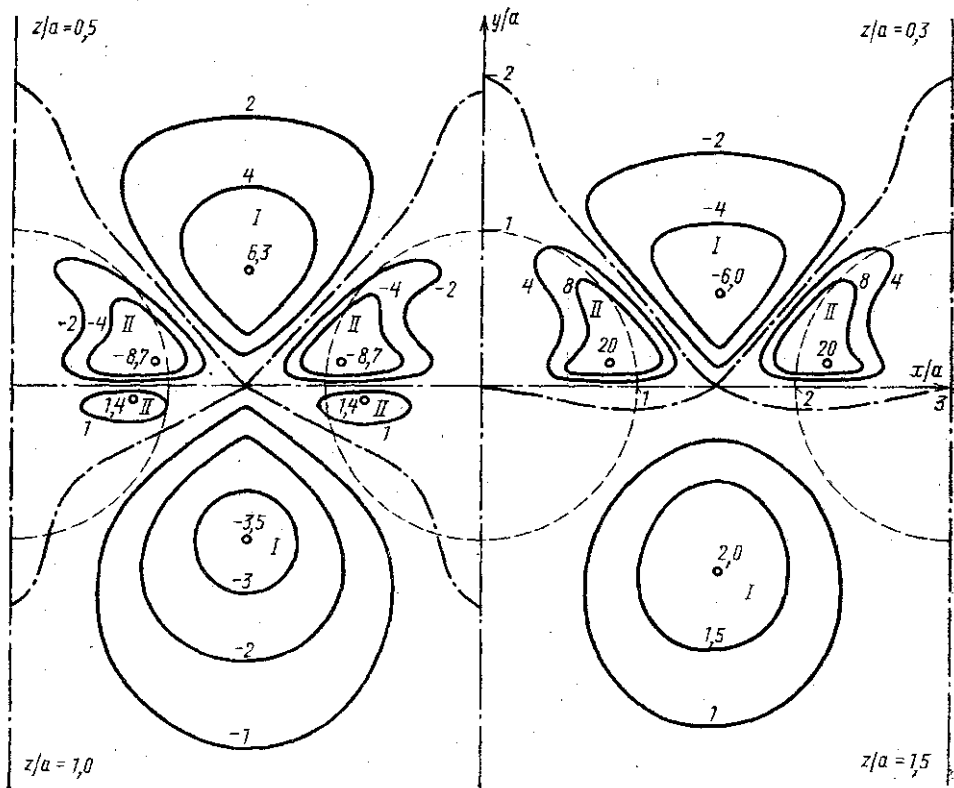


Рис. 1. Линии равных напряжений компоненты  $\sigma_{xy}$  в единицах  $\sigma_{xy}4\pi(1-\nu)a/\nu Gb$  для четырех уровней  $z/a=0,3; 0,5; 1,0; 1,5$ ; штрих-пунктир — линии нулевых напряжений, пунктир — дислокационная петля ансамбля,  $\circ$  — положение максимума, цифрой обозначена величина максимального напряжения

ления вектора Бюргерса сделан на основании анализа работы источника дислокаций в кристаллах со структурой каменной соли.

Компоненты тензора упругих напряжений  $\sigma_{ij}$  вычислялись по формуле Пича — Келера [10] в изотропном приближении; использовался принцип суперпозиции. Выражения для компонент напряжения единичной петли и схема их вычислений даны в Приложении. Поле напряжений ансамбля петель рассчитывалось на ЭВМ с использованием этих выражений. Расчет проводился применительно к кристаллам каменной соли с коэффициентом Пуассона  $\nu=0,25$ . Для удобства анализа полученных результатов вычислялись безразмерные величины  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}4\pi(1-\nu)a/\nu Gb$  как функции безразмерных координат  $x/a, y/a, z/a$ , где  $G$  — модуль сдвига и  $b$  — вектор Бюргерса дислокаций ансамбля.

§ 2. Результаты и их анализ. Предварительно были проведены расчеты для одной, двух, трех, пяти, восьми и девяти петель, которые показали, что для выяснения всех особенностей поля линейной цепочки из  $n$  петель достаточно учесть поле 5 петель, так как начиная с 3 петель последующее прибавление еще одной пары петель практически не изменяет значений поля напряжений в центральной части ансамбля.

Поле напряжений линейной цепочки дислокаций обладает естественной периодичностью с периодом  $3a$  и большой неоднородностью. Начиная с расстояний  $3a$  по осям  $y$  и  $z$  компоненты тензора напряжений быстро спадают по закону  $\sigma_{ij} \sim 1/y^3$  и  $\sigma_{ij} \sim 1/z^3$ . На рис. 1—3 приведены линии равных напряжений для одвиговых компонент напряжений над центральной петлей ансамбля в сечениях  $z/a=0,3; 0,5; 1,0; 1,5$ .

Компонента напряжений  $\sigma_{xy}$  (рис. 1) симметрична по  $x$  и антисимметрична по  $y$ . Кроме нулевой линии равных напряжений  $x=0$  имеется нулевая линия, разделяющая максимумы двух типов; максимумы первого типа I располагаются в промежутках между петлями, а второго II — над петлями. Относительная величина этих максимумов меняется по мере удаления от плоскости залегания ансамбля. Как видно из рис. 1, на уровне  $z/a=0,5$  высота максимумов обоих типов приблизительно одинаковая, ниже этого уровня преобладает максимум второго типа, выше — максимум первого. На уровне  $z/a=1,5$  макси-

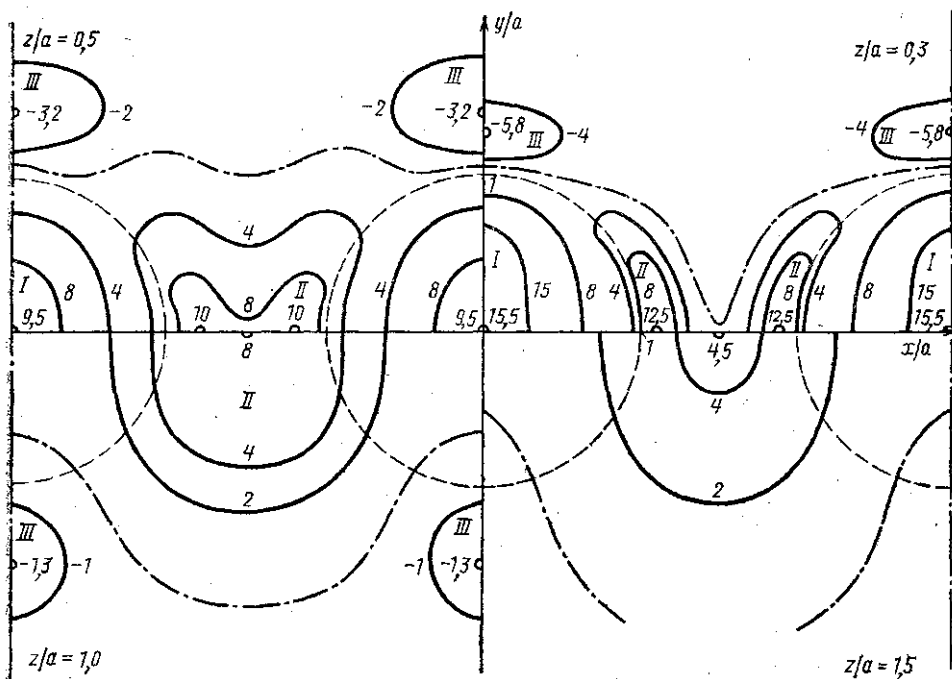


Рис. 2. Линии равных напряжений компоненты  $\sigma_{xz}$

мум второго типа практически исчезает. Линия нулевых напряжений по мере удаления от плоскости петель приближается к оси  $x$  и наконец сливается с ней.

Компонента  $\sigma_{xz}$  симметрична и по  $x$  и по  $y$ . Для этой компоненты (рис. 2) характерно наличие максимумов трех типов. Два из них I и

II располагаются над площадью, занимаемой ансамблем, третий III смещен на расстояние  $y/a=1,5$ . Два первых максимума имеют одинаковый знак напряжения, тогда как третий по знаку им противоположен, и, следовательно, область его расположения отделена линией нулевых напряжений. Относительная величина максимумов по мере удаления от плоскости  $z/a=0$  изменяется, подобно тому как описано выше для компоненты  $\sigma_{xy}$ . Если при  $z/a=0,3$  максимум I преобладает над максимумом II, то на уровне  $z/a=0,5$  величина их уже выравнивается, а при  $z/a=1,0$  максимум I практически не существует, в то время как максимум II имеет еще значительную величину и на уровне  $z/a=1,5$ . Максимум III на уровнях  $z/a=0,3$  и  $0,5$  имеет меньшую величину, чем два предыдущих, но спадает довольно медленно и еще существует при  $z/a=1,0$ .

Компонента  $\sigma_{yz}$  антисимметрична и по  $x$  и по  $y$ , а по величине оказывается меньше, чем  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xz}$ , на всех уровнях приблизительно в 2,5 раза, что обусловлено выбором вектора Бюргера. Для  $\sigma_{yz}$  характерно наличие двух типов максимумов (I, II); линия нулевых напряжений, их разделяющая, проходит почти параллельно петле (рис. 3). Так же, как и для других сдвиговых компонент, при увеличении  $z/a$  величина максимумов убывает неравномерно, поэтому существуют уровни, где величина максимума I больше величины максимума II, уровень, где эти максимумы равны, и уровни, где величина максимума I меньше величины максимума II, и, наконец, при  $z/a=1,0$  максимумы первого типа исчезают. Линии нулевых напряжений, параллельные оси  $y$ , отстоят друг от друга на расстояние  $x/a=1,5$ .

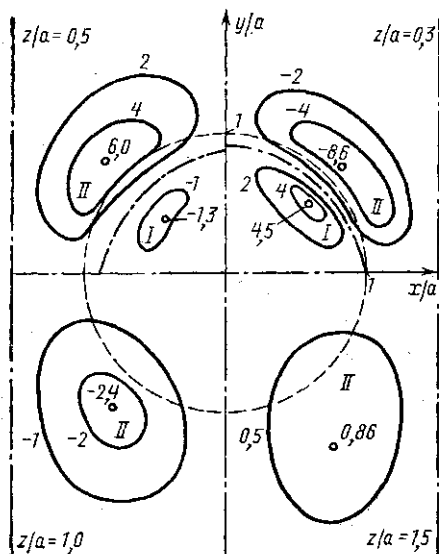


Рис. 3. Линии равных напряжений компоненты  $\sigma_{yz}$

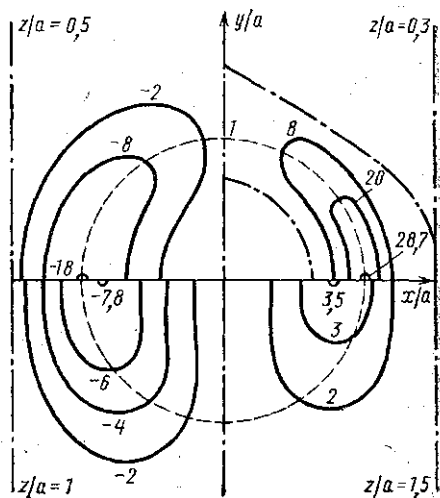


Рис. 4. Линии равных напряжений компоненты  $\sigma_{zz}$

Структура полей напряжений трех нормальных компонент  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  приблизительно одинакова. Все они имеют максимумы одного типа, периодически меняющие знак вдоль длины цепочки. На рис. 4 в качестве примера приведены линии равных напряжений для  $\sigma_{zz}$ . По максимальным значениям поля компонента  $\sigma_{zz}$  на всех уровнях превосходит  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ .

Таким образом, для всех компонент поля напряжений характерно наличие максимумов, относительные величины которых меняются при изменении  $z/a$ .

### Приложение

В случае одной скользящей круговой петли (вектор Бюргера петли лежит в плоскости залегания петли) без ограничения общности на полученные выражения для компонент систему координат можно расположить следующим образом: начало координат поместить в центре петли, плоскость  $xy$  совместить с плоскостью петли и ось  $x$  направить вдоль вектора Бюргера  $\mathbf{b}$ . Координаты петли задавались в полярной системе координат  $x' = a \cos \varphi$ ,  $y' = a \sin \varphi$ ,  $z' = 0$ . Компоненты тензора упругих напряжений вычислялись по формуле Пича — Келера [10]. Выражения для компонент поля напряжений скользящей дислокационной петли круговой формы могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{Gbma}{4\pi(m-1)} \{3z [x^2 J_2 - 2ax J_8 + a^2 (J_2 - J_4)] + z J_1\}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{Gba}{4\pi} \left[ z J_6 + 3 \frac{m}{m-1} z (xy J_2 + a^2 J_{11} - ax J_3 - ax J_8) \right], \\ \sigma_{xz} &= \frac{Gba}{4\pi} \left[ a J_7 - y J_6 - \frac{m}{m-1} (3z^2 x J_2 - 3z^2 a J_8 - x J_1 + a J_9) \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{Gbaz}{4\pi(m-1)} [(2-m) J_1 + 3m (y^2 J_2 - 2ay J_3 + a^2 J_4)], \\ \sigma_{yz} &= \frac{Gba}{4\pi(m-1)} (a J_{10} - y J_1 + 3z^2 m y J_2 - 3z^2 m a J_3), \\ \sigma_{zz} &= \frac{Gbma}{4\pi(m-1)} (3z^2 J_2 - z J_1),\end{aligned}$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $m = 1/\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.  $J_k$  — интегралы типа  $\int R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi / r^n$ ,  $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$  — рациональная функция от  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ ,  $n = 3$  или  $5$ . Интегралы  $J_k$  с помощью замены переменных  $\psi = (\varphi - \alpha - \pi)/2$ , где  $\alpha = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$  приводятся к интегралам типа

$$\begin{aligned}I_{ni} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^i \psi d\psi}{(V \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi})^n}; \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}; \\ J_1 &= -\frac{4 \cos \alpha}{M^3} (2I_{32} - I_{30}); \quad J_2 = -\frac{4 \cos \alpha}{M^5} (2I_{52} - I_{50}); \\ J_3 &= \frac{4 \cos \alpha \sin \alpha}{M^5} (I_{50} - 8I_{52} + 8I_{54}); \quad J_4 = -\frac{2}{M^5} [2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \times \\ &\times (24I_{56} - 36I_{54} + 14I_{52} - I_{50}) + \cos^3 \alpha (-16I_{56} + 24I_{54} - 8I_{52})]; \\ J_6 &= -\frac{4 \sin \alpha}{M^3} (2I_{32} - I_{30}); \quad J_7 = \frac{4}{M^3} [\sin^2 \alpha I_{30} + 4 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (I_{32} - I_{34})]; \\ J_8 &= \frac{4}{M^5} [4 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (I_{54} - I_{52}) + \cos^2 \alpha I_{50}]; \\ J_9 &= \frac{4}{M^3} [4 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (I_{34} - I_{32}) + \cos^2 \alpha I_{30}];\end{aligned}$$

$$J_{10} = \frac{4 \cos \alpha \sin \alpha}{M^3} (I_{30} - 8I_{32} + 8I_{34});$$

$$J_{11} = -\frac{2}{M^5} [2 \sin \alpha \cos^3 \alpha (24I_{56} - 36I_{54} + 14I_{52} - I_{50}) + \\ + \sin^3 \alpha (-16I_{56} + 24I_{54} - 8I_{52})];$$

$$M = \sqrt{t(1+p^2)}; p^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2/t}; t = x^2 + y^2 + z^2 + a^2; k^2 = 2p^2/(1+p^2).$$

Интегралы  $I_{ni}$  являются табличными или при помощи рекуррентного соотношения сводятся к табличным и выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода  $\tilde{K}$  и  $\tilde{E}$  соответственно следующим образом [11]:

$$I_{30} = \frac{\tilde{E}}{k'^2}; \quad I_{52} = \frac{\tilde{K}}{3k^2} + \frac{2k^2-1}{3k^2k'^2} \tilde{E}; \\ I_{32} = \frac{\tilde{K}}{k^2} - \frac{\tilde{E}}{k^2}; \quad I_{54} = \frac{2+k^2}{3k^4} \tilde{K} - \frac{2}{3} \frac{(k^2+1)}{3k^4} \tilde{E}; \\ I_{34} = \frac{(k'^2+1)}{k^4} \tilde{E} - \frac{2k'^2}{k^4} \tilde{K}; \quad I_{56} = -\frac{k'^2}{k^2} (4I_{54} - 3I_{52}). \\ I_{50} = \frac{2(k'^2+1)}{3k'^4} \tilde{E} - \frac{\tilde{K}}{3k'^2}; \quad k^2 = \frac{2p^2}{1+p^2}; \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зиненкова Г. М., Штром Е. В., Кухаренко Н. А. Источники дислокаций в монокристаллах хлористого натрия под влиянием ультразвукового поля.— В кн.: Динамика дислокаций. Харьков, 1968, с. 235—242. [2] Туарипина Н. А., Зиненкова Г. М., Штром Е. В. Dislocation multiplication in alkali halide crystals exposed to ultrasonic waves.— Phys. Stat. Sol. (a), 1978, 46, p. 327—336. [3] Прайс П. Б. Непосредственное наблюдение скольжения, переползания и двойникования в гексагональных металлических кристаллах.— В кн.: Электронная микроскопия и прочность кристаллов. М.: Металлургия, 1968, с. 42—122. [4] Tetelman A. S. Dislocation dipole formation in deformed crystals.— Acta Met. 1962, 10, p. 813—820. [5] Crowes G. W., Kelley A. Climb of dislocation magnesium oxide.— J. Appl. Phys. Sup., 1962, 33, N 1, p. 457—460. [6] Кroupa F. The interaction between prismatic dislocation loops and straight dislocations.— Phil Mag., 1962, 7, p. 783—795. [7] Marcinkowski K. S., Sree Harsha. Properties of finite circular dislocation glide loops.— J. Appl. Phys., 1968, 39, p. 1775—1783. [8] Бушueva Г. В., Хомякова Р. Д., Предводителев А. А. Поле напряжений круговой дислокационной петли с произвольным вектором Бюргерса.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, 15, № 3, с. 329—334. [9] Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972, с. 76. [10] Де Вит Р. Континуальная теория стационарных дислокаций.— В кн.: Дж. Эшелби. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963, с. 193. [11] Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: ГИФМЛ, 1962, с. 171—179.

Поступила в редакцию  
22.10.79