(волновые расстройки вычислялись по формулам, приведенным в [1]). КПД генерации в свободном пространстве соответствуют точки при $R=0$. Видно, что дисперсия снижает эффективность генерации. Интересно отметить, однако, что дисперсия среды увеличивает выигрыш в КПД, получаемый за счет резонатора: из кривых 1 на рис. 3 видно, что отношение $\eta_{max}/\eta(R=0)$ для диспергирующей среды больше, чем для среды без дисперсии (величина R_{opt} в диспергирующей среде также повышается). Наконец, даваемый резонатором выигрыш тем больше, чем больше $\lambda_{ик}$.

Развитая здесь стационарная теория применима лишь в случае достаточно большого числа отражений ИК-волны в резонаторе: $\tau c/L \gg 1$, где τ — длительность импульса, L — длина резонатора, c — скорость света. Минимальную длину резонатора можно оценить из условия $L=2L_0 \approx 2\pi/\Gamma$, где L_0 — эффективная длина области возбуждения молекулярных колебаний [1], Γ — инкремент усиления. Оценки по этим формулам показывают, что как в условиях работы [3] ($\tau=10$ нс, $\Gamma=0{,}8$ см$^{-1}$, $\tau c/L \approx 40$), так и в условиях работ [4, 5] ($\tau=60$ нс) условие стационарности можно считать выполненным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дьяков Ю. Е., Нехаенко В. А., Никитин С. Ю. Пятиволновая модель когерентного рамановского смешения.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон., 1981, 22, № 4, с. 52—58. [2] Бондаренко С. И., Дьяков Ю. Е., Нехаенко В. А., Никитин С. Ю. К теории генерации ИК-излучения при четырехволновом процессе на основе неколлинеарного ВКР и в резонаторе.— В кн.: Тезисы докл. IX Всес. конф. по когерентной и нелинейной оптике. М., 1978, ч. II, с. 117. [3] Brosnan S. J., Fleming R. N., Herbst R. L., Byer R. L. Tunable infrared generation by coherent Raman mixing in H_2.— Appl. Phys. Lett., 1977, 30, p. 330—332. [4] Loy M. M. T., Sorokin P. P., Lankard J. R. Generation of 16-μm radiation by four-wave mixing in parahydrogen.— Appl. Phys. Lett., 1977, 30, p. 415—417. [5] Sorokin P. P., Loy M. M. T., Lankard J. R. A 16-μm radiation source utilizing four-wave mixing in cooled parahydrogen gas.— IEEE J. of Quant. Electron, 1977, **QE—13**, p. 871—875. [6] Борисевич Н. А., Верещагин В. Г., Валидов М. А. Инфракрасные фильтры. Минск, 1971, с. 101—158. [7] Розенберг Г. В. Оптика тонкослойных покрытий. М.: ГИФМЛ, 1958, с. 249.

Поступила в редакцию
09.07.79

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 6

УДК 534.222.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕМНЫМИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

В. Э. Гусев

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Для описания акустических волн конечной амплитуды, источники которых распределены в пространстве, можно использовать неоднородное уравнение Бюргерса [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} = f(\tau, x). \qquad (1)$$

Здесь оно выписано для возмущения плотности в сопровождающей системе координат (x, $\tau=t-x/c_0$). В уравнении (1) ε и b — константы акустической нелинейности и диссипации, ρ_0 — равновесная плотность среды, c_0 — скорость звука в линейном приближении. Правая часть $f(\tau, x)$ описывает распределенные источники акустических волн.

Получение аналитических решений неоднородного квазилинейного уравнения второго порядка (1) возможно лишь для специальных видов «силы» f [2]. В то же время при рассмотрении наиболее интересного с физической точки зрения случая распространения звука большой интенсивности можно упростить уравнение (1), так как нелинейные эффекты преобладают над «вязкими». Опуская в модели (1) член, ответственный за высокочастотное затухание акустических возмущений, получаем неоднородное уравнение простых волн:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = f(\tau, x). \qquad (2)$$

С математической точки зрения это уравнение является более универсальным в том смысле, что позволяет получить точные решения большего числа различных задач [3, 4].

Конечно, при понижении порядка уравнения, что физически соответствует переходу к случаю больших акустических чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} \gg 1$), мы теряем часть информации о рассматриваемом явлении. Тем не менее основные закономерности процесса описываются корректно и уравнением первого порядка (2), исследовать которое порой оказывается легче [5].

Например, квазилинейное уравнение в частных производных (2) может быть решено в квадратурах при любом виде «синхронной» силы ($f(\tau, x) \equiv f(\tau)$):

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{c_0\rho_0}}} \int\limits_{\tau}^{\Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2c_0\rho_0}\rho^2 + \psi(\tau)\right)} \frac{d\tau'}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2c_0\rho_0}\rho^2 + \psi(\tau) - \psi(\tau')}}. \qquad (3)$$

Здесь $\psi(\tau)$ — первообразная функция $f(\tau)$, а функция Φ при заданном граничном условии $\rho(x=0, \tau) = \varphi_0(\tau)$ имеет вид

$$\Phi(\tau) = \frac{\varepsilon}{2c_0\rho_0} \varphi_0^2(\tau) + \psi(\tau).$$

Соотношение (3) представляет собой решение в неявном виде. Наиболее просты для анализа те физические задачи, в которых вид функции ψ допускает проведение интегрирования в (3). В настоящей работе рассматриваются некоторые физические приложения модели неоднородного уравнения простых волн с гармонической правой частью. Замечательной особенностью этого уравнения является существование точного решения в специальных функциях.

Рассмотрим, например, взаимодействие двух встречных лазерных пучков с частотами ω_1 и ω_2 и амплитудами E_1 и E_2. Правая часть (2) в этом случае имеет вид [1]:

$$f(\tau, x) = \frac{Y}{16\pi} \frac{E_1 E_2}{c_0^2} \frac{\Omega}{c_0} \sin(\Omega\tau + \delta x).$$

Здесь Y — параметр оптико-акустической связи, $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ — разностная частота акустического диапазона, величина $\delta = \Omega/c_0 - (\omega_1 + \omega_2) n/c$ имеет смысл расстройки, возникающей из-за неоптимального выбора частот лазерного излучения при заданной дисперсии среды n, c — скорость света. Путем замены переменных и неизвестной функции задача сводится к модели (2) с синхронными пространственно-однородными источниками. Решение с нулевыми граничными условиями в начале координат имеет вид

$$\sigma = \int\limits_{\theta}^{\arccos\left(\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{\rho'^2}{2} + \cos\theta\right)} \frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{\rho'^2}{2} - \cos\theta + \cos\theta'}}, \qquad (4)$$

где безразмерные переменные $\sigma = \alpha x$, $\theta = \Omega\tau + \delta x$, и функция $\rho' = \rho/\beta - \Delta$ введены с помощью констант:

$$\alpha = \sqrt{\frac{A\varepsilon\Omega}{c_\theta \rho_0}},\ \beta = \frac{A}{\alpha},\ \Delta = \frac{\delta}{\alpha},\ A = \frac{Y}{16\pi} \frac{E_1 E_2}{c_0^2} \frac{\Omega}{c_0}.$$

Соотношение (4) преобразуется к эллиптическим интегралам первого рода. Так, в случае $\delta = 0$ имеем

$$\sigma = F\left(\frac{\pi}{2}, \gamma\right) - F\left(\arcsin\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\gamma}\right), \gamma\right); \qquad (5)$$

здесь используется обозначение

$$\gamma = \sqrt{\frac{\rho'^2}{4} + \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Качественные выводы об особенностях генерации звука при наличии расстройки можно сделать на основе решения (4) и не прибегая к графическому анализу. Действительно, для определенности арккосинуса в этой формуле необходимо выполнение неравенства

$$\left|\frac{\Delta^2}{2} - \frac{\rho'^2}{2} + \cos\theta\right| \leqslant 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что при малых положительных расстройках амплитуда положительного полупериода волны растет, а отрицательного — убывает. Физически это объясняется тем, что области сжатия в акустической волне движутся со скоростями, превышающими скорость звука c_0. Поэтому при малых положительных расстройках источники перемещаются синхронно с ними и условия их генерации улучшаются. Для областей разрежения при расстройках такого знака наблюдается обратное явление. Так же, как и при распространении граничного режима [6], накапливающиеся нелинейные искажения приводят к образованию разрыва в профиле акустической волны. Используя решение (5), определим расстояние образования разрыва $\sigma_р$: полагая в (5) $\theta = 0$, получаем

$$\sigma = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\rho'}{2}\right) = \mathscr{K}\left(\frac{\rho'}{2}\right). \qquad (6)$$

Здесь $\mathscr{K}$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. На рис. 1 приводится зависимость (6) амплитуды разрыва от расстояния до неподвижной границы. Как следует из рисунка, $\sigma_р = \pi/2$.

Результаты графического анализа соотношения (5) представлены на рис. 2, который полностью подтверждает существующие представления об особенностях генерации интенсивного звука в периодических полях [2]. Фронт в акустической волне проводится по правилу «равенства площадей». Конечно, неоднородное уравнение простых волн не позволяет описать структуру ударного фронта, как это возможно с помощью уравнения (1). Однако точное решение неоднородного уравнения Бюргерса с гармонической правой частью, представимое в виде отношения двух бесконечных сумм периодических функций Матье, сравнительно сложно для анализа. Результаты же решения уравне-

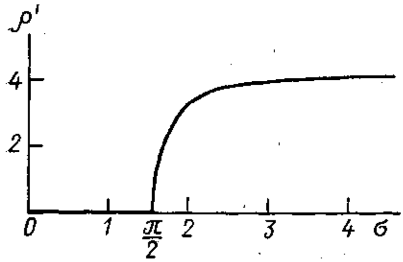

Рис. 1. Зависимость амплитуды разрыва от расстояния, пройденного волной

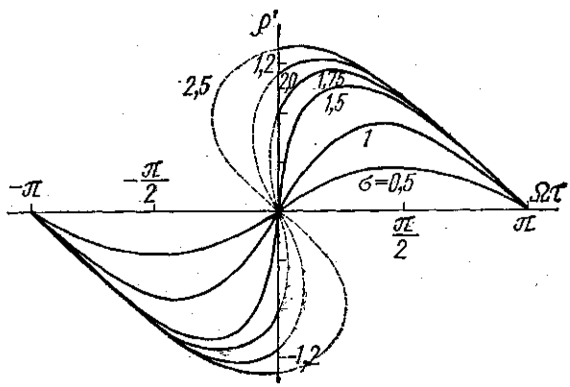

Рис. 2. Динамика профиля волны (Re≫1)

ния (2) и наглядны (см., например, (6)) и правильно описывают суть физического процесса (например, отличающуюся от пилообразной, асимптотическую форму волны на больших расстояниях от границы).

В качестве другого физического приложения рассматриваемого математического аппарата обратимся к вопросу о распространении плоских акустических волн конечной амплитуды в слабонеоднородной среде. Уравнение для потенциала скорости $\varphi(t, x)$ $\left(v = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ с точностью до членов второго порядка по числу Маха в идеальной одномерной среде имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2[1 + mg(x)]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]. \quad (7)$$

При получении модели (7) предполагалось, что неоднородность среды можно формально учесть введением переменного коэффициента в волновое уравнение:

$$c^2{}_0(x) = c^2{}_0[1 + mg(x)], \ m \sim \mu, \quad (8)$$

где $g(x)$ — произвольная действительная функция ($|g(x)| \leqslant 1$), а μ — некоторый малый параметр. Модифицируя метод медленно-меняющегося профиля в соответствии со спецификой рассматриваемой задачи, представим возмущение в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$\varphi = \varphi_+\left(\tau_1 = t - \frac{x}{c_0}, \mu x\right) + \varphi_-\left(\tau_2 = t + \frac{x}{c_0}, \mu x\right). \quad (9)$$

Тогда, сохраняя в уравнении (7) члены порядка μ^2, получаем

$$\frac{\partial\rho_+}{\partial x} - \frac{\partial\rho_-}{\partial x} - \frac{m}{2c_0}g\left[\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2}\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\left(\rho_+\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1} + \rho_-\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2}\right) + \frac{\varepsilon-2}{c_0\rho^0}\left(\rho_+\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2} + \rho_-\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1}\right). \quad (10)$$

Здесь по формулам

$$\rho_+ = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial\varphi_+}{\partial\tau_1} \sim \mu, \quad \rho_- = -\frac{\rho_0}{c}\frac{\partial\varphi_-}{\partial\tau_2} \sim \mu$$

введены возмущения плотности среды, а переменные связаны соотношением

$$x = \frac{c_0}{2}(\tau_2 - \tau_1). \tag{11}$$

Проведем усреднение уравнения (10) по пространственной координате:

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{l}\int\limits_{x-l/2}^{x+l/2} (\ldots)\,dx'. \tag{12}$$

Длина усреднения l выбирается кратной длине волны λ первой гармоники возмущения ($l = n\lambda$, $n \gg 1$), но значительно меньшей характерного пространственного масштаба L изменения плотности в волне ($l \ll L \sim 1/\mu$). Операция (12) сохраняет лишь те составляющие функции, которые медленно зависят от пространственной переменной. Применяя усреднение (12) сначала в системе координат (τ_1, x), а потом (τ_2, x), получаем два уравнения:

$$\frac{\partial\rho_+}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho_+\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1} = \frac{m}{2c_0}\left[\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1}\langle g(x)\rangle + \left\langle\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2}g(x)\right\rangle_{\tau_1}\right], \tag{13}$$

$$\frac{\partial\rho_-}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho_-\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2} = -\frac{m}{2c_0}\left[\left\langle\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1}g(x)\right\rangle_{\tau_2} + \frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2}\langle g(x)\rangle\right]. \tag{14}$$

Вместе с соотношением (11) они образуют замкнутую систему, которая полностью описывает исследуемый процесс в приближении (8), (9).

Применим упрощенные уравнения (13), (14) для анализа взаимодействия встречных волн в квазипериодической структуре:

$$g(x) = h(\mu x)\cos k_0 x, \quad k_0 \gg \mu.$$

Используя представление возмущений плотности в виде ряда Фурье

$$\rho_+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)\,e^{in\omega_0\tau_1}, \quad \rho_- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x)\,e^{in\omega_0\tau_2},$$

приведем исследуемую систему к виду

$$\frac{\partial\rho_+}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho_+\frac{\partial\rho_+}{\partial\tau_1} = \frac{m}{4c_0}h\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[b_{n_0}e^{i\delta x + in_0\omega_0\tau_1} + \text{к. с.}\right],$$

$$\frac{\partial\rho_-}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho_-\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2} = -\frac{m}{4c_0}h\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left[a_{n_0}e^{-i\delta x + in_0\omega_0\tau_2} + \text{к. с.}\right], \tag{15}$$

$$a_n = a^*_{-n} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\rho_+(x,\tau_1)\,e^{-in\omega_0\tau_1}\,d\tau_1,$$

$$b_n = b^*_{-n} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\rho_-(x,\tau_2)\,e^{-in\omega_0\tau_2}\,d\tau_2,$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — основная частота волнового возмущения. Уравнения (15) описывают взаимодействие встречных нелинейных полей, обусловленное тем, что их гармоники с номерами n_0 попадают в полосу непрозрачности исследуемой неоднородной структуры и эффективно отражаются. Волновые числа этих гармоник по величине близки к половине волнового числа квазипериодической решетки:

$$n_0\frac{\omega_0}{c_0}-\frac{k_0}{2}\equiv\frac{\delta}{2}\sim\mu,\ \delta\ll\frac{\omega_0}{c_0}.$$

Особенностью системы уравнений (15) является тесное переплетение в ней спектрального и полевого описаний акустического возмущения. Полный математический анализ таких уравнений в настоящее время, по-видимому, возможен лишь с использованием ЭВМ. Однако качественные представления о поведении волновых полей в общем случае можно получить из анализа некоторых модельных ситуаций. Например, представляет интерес рассмотрение структуры отраженного поля в заданном пространственно-однородном поле накачки $(\rho_+(x,\ \tau_1)\equiv \equiv\rho_+(\tau_1))$. Как следует из системы (15), такая задача в случае, когда $h(x)\equiv 1$, а $\rho_+(\tau_1)$ является нечетной функцией, описывается уравнением

$$\frac{\partial\rho_-}{\partial x}+\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho_-\frac{\partial\rho_-}{\partial\tau_2}=-\frac{m}{2c_0}in_0\omega_0a_{n_0}\cos(n_0\omega_0\tau_2-\delta x),\qquad(16)$$

причем на правой границе $(x=d)$ периодической структуры отраженная волна отсутствует:

$$\rho_-(x=d,\ \tau_2)=0.\qquad(17)$$

Представление о характере решения задачи (16), (17) можно получить из рассмотрения рис. 1—2.

Распространение падающей волны в заданном пространственно-однородном встречном поле также подчиняется квазилинейному уравнению типа (2), (16), но с другим граничным условием

$$\rho_+(x=0,\ \tau_1)=\varphi_0(\tau_1).$$

Таким образом, исследуемые модели описываются неоднородными уравнениями простых волн с гармонической правой частью и для их анализа применим развитый в настоящей работе математический аппарат.

В заключение необходимо отметить, что исследование системы (11), (15), которая получена в этой статье лишь для иллюстрации возможностей предлагаемых математических методов, представляет самостоятельный физический интерес, так как использование периодических структур позволяет осуществить воздействие на отдельные гармоники акустического поля в недиспергирующей среде [7, 8].

Автор выражает искреннюю благодарность О. В. Руденко за руководство работой и А. А. Карабутову за внимание, проявленное к полученным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Руденко О. В. — Письма в ЖЭТФ, 1974, **20**, № 7, с. 445—448. [2] Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. — ЖЭТФ, 1974, **71**, № 7, с. 111. [3] Гусев В. Э., Руденко О. В. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, **19**, № 4, с. 117—119. [4] Карабутов А. А. — Письма в ЖЭТФ, 1979, **5**, № 7, с. 429—432. [5] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. [6] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. [7] Ланина Э. П., Руденко О. В., Шмальгаузен В. И. — Акуст. журн., 1978, **24**, с. 4. [8] Ланина Э. П. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1979, **20**, № 1, с. 85—88.

Поступила в редакцию
05.11.79