Нелинейное рассеяние света на доменах наиболее перспективно в этом отношении.

Автор благодарен Л. М. Казаряну за предоставление образцов кристаллов ниобата бария — лития и ниобата калия — лития, В. В. Воронову за предоставление образцов ниобата бария — стронция и С. М. Салтиелу за помощь в проведении ряда экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Van Uitert L. G., Levinstein H. J., Rubin J. J., Capio C. D., Dearborn E. F., Bonner W. A. Some characteristics of niobates having «filled» tetragonal tungsten bronze-like structures.— Mat. Res. Bull., 1968, 3, N 1, p. 47—58. [2] Александровский А. Л., Маскаев Ю. А., Наумова И. И. Эффект электрооптической дифракции света на ростовой доменной структуре кристаллов барий-натриевого ниобата.— ФТТ, 1975, 17, № 11, с. 3197—3200. [3] Ballman A. A., Kurtz S. K., Brown H. Some effects of melt stoichiometry on the optical properties of barium sodium niobate.— J. Cryst. Growth, 1971, 10, N 2, p. 185—189. [4] Dolino G. Effects of domain shapes on second-harmonic scattering in triglycine sulfate.— Phys. Rev., 1972, B6, N 10, p. 4025—4035. [5] Weinmann D., Vogt H. Second harmonic light scattering by laminar ferroelectric domains.— Phys. Stat. Sol., 1974, A23, N 2, p. 463—472. [6] Ахманов А. С., Дубовик А. Н., Салтиел С. М., Томов И. В., Тункин В. Г. Нелинейные оптические эффекты 4-го порядка по полю в кристалле формиата лития.— Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, № 4, с. 264—268. [7] Freund I. Nonlinear diffraction.— Phys. Rev. Lett., 1968, 21, p. 1404—1406. [8] Чиркин А. С. О генерации второй гармоники в полидоменных кристаллах.— В кн.: Нелинейная оптика. Новосибирск.: Наука, 1968, с. 202—207.

Поступила в редакцию
10.01.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1981, Т. 22, № 6

УДК 521.13

О СИММЕТРИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Л. Г. Лукьянов

(ГАИШ)

В качестве исходных уравнений движения тела нулевой массы в ограниченной задаче трех тел рассмотрим уравнения Нехвила [1]

$$x'' - 2y' = \frac{\partial\Omega}{\partial x},\ y'' + 2x' = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$z'' = \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{1}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{1+e\cos v}\left(\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{z^2}{2}e\cos v + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right),$$
$$r^2{}_1 = (x+\mu)^2+y^2+z^2,$$
$$r^2{}_2 = (x+\mu-1)^2+y^2+z^2,$$

v, e — соответственно истинная аномалия и эксцентриситет орбиты основных тел. Штрихи обозначают дифференцирование по независимой переменной v. Постоянная тяготения, сумма масс основных тел и расстояние между ними приняты в качестве единиц измерения.

В работах [2, 3] показано, что все траектории уравнений (1) образуют взаимно симметричные «четверки» с симметричными законами движения по ним:

$$x(v),\quad y(v),\quad z(v),\quad x'(v),\quad y'(x),\quad z'(v),\qquad (а)$$

$$x(v),\quad y(v),\quad -z(v),\quad x'(v),\quad y'(v),\quad -z'(v),\qquad (б)$$

$$x(-v),\quad -y(-v),\quad z(-v),\quad -x'(-v),\quad y'(-v),\quad -z'(-v),\qquad (в)$$

$$x(-v),\quad -y(-v),\quad -z(-v),\quad -x'(-v),\quad y'(-v),\quad z'(-v).\qquad (г)$$

Начальные условия решений (б)—(г) можно аналогичным симметричным образом выразить через начальные условия ($а_0$) решения (а):

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0,\quad x_0',\quad y_0',\quad z_0' \text{ при } v=v_0,\qquad (а_0)$$

$$x_0,\quad y_0,\quad -z_0,\quad x_0',\quad y_0',\quad -z_0' \text{ при } v=v_0,\qquad (б_0)$$

$$x_0,\quad -y_0,\quad z_0,\quad -x_0',\quad y_0',\quad -z_0' \text{ при } v=-v_0,\qquad (в_0)$$

$$x_0,\quad -y_0,\quad -z_0,\quad -x_0',\quad y_0',\quad z_0' \text{ при } v=-v_0.\qquad (г_0)$$

С симметрией решений ограниченной задачи трех тел тесным образом связана симметрия первых интегралов задачи. Пусть произвольный первый интеграл системы (1) имеет вид

$$F(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ v)=C. \tag{2}$$

Тогда можно утверждать, что функция F обладает свойствами симметрии

$$F(x, y, z, x', y', z', v)=F(x, y, -z, x', y', -z', v)=$$
$$=F(x,\ -y,\ z,\ -x',\ y',\ -z',\ -v)=F(x,\ -y,\ -z,\ -x',\ y',\ z',\ -v). \tag{3}$$

Действительно, от противного: предположим, что хотя бы одно из равенств (3) не выполняется. Так как каждую траекторию движения тела нулевой массы можно получить путем пересечения соответствующих поверхностей вида (2), то из предположения будет следовать, что существует хотя бы одна траектория, у которой нет симметричной или нарушен симметричный закон движения. Но это приводит к противоречию с симметрией всех решений уравнений (1), известной по работам [2, 3], что и доказывает свойства симметрии первых интегралов (3). Другое доказательство дано в работе [4].

Проведенное выше рассуждение показывает, что симметрия всех решений уравнений (1) влечет за собой симметрию всех первых интегралов. Справедливо и обратное утверждение. Действительно, если все первые интегралы обладают свойствами симметрии (3), то каждая траектория движения будет обладать аналогичной симметрией, так как все поверхности вида (2) симметричны. Следовательно, свойство симметрии решений и свойство симметрии первых интегралов являются эквивалентными.

Из доказанного также следует, что значение произвольной постоянной первого интеграла (2), соответствующее любому из четырех симметричных решений (а)—(г), одно и то же, в чем можно убедиться и непосредственным вычислением по начальным значениям ($а_0$)—($г_0$). Таким образом, из общего интеграла можно определить траекторию движения только с точностью до симметричной.

Известный для ограниченной круговой задачи трех тел ($e=0$, $v=t$) интеграл Якоби

$$2\Omega-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=C$$

обладает свойствами симметрии (3). Следствием этого является симметрия поверхностей Хилла

$$2\Omega=C$$

относительно координатных плоскостей xy и xz.

Никаких других первых интегралов в ограниченной задаче трех тел не известно. Тем интереснее представляются свойства симметрии первых интегралов не только с точки зрения сужения диапазона поиска новых первых интегралов, но и с точки зрения уменьшения возможностей перебора различных видов функции F при доказательстве теорем несуществования, так как свойства (3) являются необходимым условием для всякого первого интеграла уравнений (1).

Возможны случаи вырождения симметричных решений в одно и то же симметричное самому себе решение, которое проще называть самосимметричным. Покажем, что уравнения (1) имеют два семейства самосимметричных решений, каждое из которых зависит от трех произвольных параметров. Их можно получить путем «склеивания» решений (а)—(г). Ясно, что решения (а) и (б) или (в) и (г) не могут быть продолжением друг друга, так как они могут либо одновременно приближаться к возможной их общей точке на плоскости xy, либо удаляться от нее. Остальные комбинации решений (а)—(г) могут являться продолжением друг друга. Основным требованием при этом будет условие непрерывности изменения координат и компонент скоростей, что приводит к требованию равенства координат и скоростей в момент $v_0=0$.

Для решений (а), (в) или (б), (г) условия непрерывности приводят к требованию ортогонального пересечения решением плоскости xz:

$$\begin{gathered} y_0=0,\ x'_0=0,\ z'_0=0,\ v_0=0, \\ x_0,\ z_0,\ y'_0 \text{ — произвольны,} \end{gathered} \tag{4}$$

а для решений (а), (г) или (б), (в) — к требованию ортогональности пересечения оси x:

$$\begin{gathered} y_0=0,\ z_0=0,\ x'_0=0,\ v_0=0, \\ x_0,\ y'_0,\ z'_0 \text{ — произвольны.} \end{gathered} \tag{5}$$

Убедиться в том, что условия (4) или (5) приводят к самосимметричной траектории, можно непосредственной проверкой совпадения начальных условий для указанных пар решений, используя формулы ($а_0$)—($г_0$).

Таким образом, условие (4) определяет одно семейство самосимметричных траекторий, зависящее от трех произвольных параметров x_0, z_0, y'_0, а условие (5) — второе семейство, зависящее от трех произвольных параметров x_0, y'_0, z'_0. Для плоской задачи ($z=0$) оба семейства вырождаются в одно, зависящее от двух произвольных параметров x_0 и y'_0.

Если самосимметричная траектория имеет вторую точку, в которой выполняются те же условия непрерывности, то такая траектория будет периодической. Например, для семейства (4) можно потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} y(v, x_0, z_0, y'_0) &= 0, \\ x'(v, x_0, z_0, y'_0) &= 0, \\ z'(v, x_0, z_0, y'_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) можно рассматривать как систему уравнений с четырьмя неизвестными. Эта система определяет семейство самосимметричных периодических орбит. Если v_1 — корень системы (6), а $v_1/2$ не является корнем, то период решения равен $2v_1$. Аналогичные рассуждения справедливы и для семейства (5). Подобные самосимметричные периодические орбиты известны, например, по работе [5].

В качестве замкнутых самосимметричных орбит можно также рассматривать двояко-асимптотические орбиты [6, 7] и самосимметричные орбиты с соударением [8]. Условия непрерывности при этом будут выполняться для $t \to \infty$ (асимптотические решения) либо вообще нарушаться (соударения), и условия (4), (5) следует заменить тогда другими.

Рассмотрим теперь уравнения ограниченной прямолинейной задачи:

$$\ddot{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{7}$$

где

$$u = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r^2_1 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2,$$

$$r^2_2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2.$$

Уравнения (7) в отличие от (1) записаны в неподвижной системе координат, вдоль оси x которой происходит движение основных тел. Точками обозначено дифференцирование по времени t. Расстояние между основными телами $r = x_2 - x_1$ здесь нормировать нежелательно, так как возможны соударения основных тел. Координаты основных тел $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно определить по формулам прямолинейной задачи двух тел:

$$x_1 = -\mu r, \quad x_2 = (1-\mu) r,$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{r}\, dr}{\sqrt{2 + hr}} = \pm (t - t_0), \quad h = \dot{r}_0^2 - \frac{2}{r_0}.$$

Отсчет времени будем вести от момента соударения основных тел (для прямолинейного движения эллиптического типа отсчет времени можно вести от момента наибольшего удаления основных тел). Тогда для любых типов движения координаты основных тел будут четными функциями времени.

В работе [9] показано, что все решения уравнений (7) образуют взаимно симметричные «восьмерки», а именно к решениям (а)—(г), в которых аргумент $\pm v$ следует заменить на $\pm t$, еще добавятся:

$$x(-t), \ y(-t), \ z(-t), \ -\dot{x}(-t), \ -\dot{y}(-t), \ -\dot{z}(-t), \quad (\text{а}')$$

$$x(-t), \ y(-t), \ -z(-t), \ -\dot{x}(-t), \ -\dot{y}(-t), \ \dot{z}(-t), \quad (\text{б}')$$

$$x(t), \quad -y(t), \quad z(t), \quad \dot{x}(t), \quad -\dot{y}(t), \quad \dot{z}(t), \quad (\text{в}')$$

$$x(t), \quad -y(t), \quad -z(t), \quad \dot{x}(t), \quad -\dot{y}(t), \quad -\dot{z}(t). \quad (\text{г}')$$

Среди решений (а′)—(г′) независимо лишь одно, например (а′), остальные получаются путем комбинации (а′) с решениями (б)—(г).

Для ограниченной прямолинейной задачи трех тел свойства симметрии первого интеграла

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = C$$

запишутся в виде

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = F(x, y, -z, \dot{x}, \dot{y}, -\dot{z}, t) =$$

$$= F(x, -y, z, -\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z}, -t) = F(x, y, z, -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}, -t), \quad (8)$$

где приведены только независимые свойства, соответствующие решениям (а, б, в, а′). В отличие от (3) интегралы прямолинейной задачи обладают новым свойством симметрии, соответствующим решению (а′), которое говорит об обратимости движения тела нулевой массы.

Для прямолинейной задачи кроме указанных двух семейств самосимметричных решений (4), (5) (с заменой v на t) имеются еще два семейства, каждое из которых зависит от трех произвольных параметров

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = t_0 = 0, \\ &x_0,\ y_0,\ z_0 \text{ — произвольны} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &z_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = t_0 = 0, \\ &x_0,\ y_0,\ \dot{z}_0 \text{ — произвольны.} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Семейство (9) получается «склеиванием» решений (а) и (а′), а семейство (10)—(а) и (б′). Каждую траекторию семейства (9) тело проходит дважды в прямом и обратном направлениях, а начальный момент соответствует точке возврата траектории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Nechvile V. Sur une nouvelle forme des equations différentielles du problème restreint elliptique.— Compt. Rend., 1926, **182**, p. 310—315. [2] Лукьянов Л. Г. О плоской форме и симметричности асимптотических решений в ограниченной задаче трех тел.— Астрон. журн., 1978, **55**, с. 156—163. [3] Miele A. Theorem of image trajectories in the earth-moon space.— Astronautica Acta, 1960, **6**, p. 225—230. [4] Лукьянов Л. Г. О симметрии первых интегралов ограниченной задачи трех тел. Письма в Астрон. журн., 1978, 4, с. 326—327. [5] Moulton F. R. Periodic orbits. Washington, 1920, p. 524. [6] Deprit A., Henrard J. Symmetric double asymptotic orbits in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1965, **70**, p. 271—280. [7] Лидов М. Л., Вашковьяк М. А. Двояко-асимптотические симметричные орбиты в плоской ограниченной круговой задаче трех тел.— Препринт № 115 Ин-та прикладной математики, 1975, с. 1—33. [8] Szebehely V. Theory of orbits. Acad. Press. N. Y., L., 1967, p. 668. [9] Лукьянов Л. Г. О симметрии решений в задаче многих тел.— Астрон. журн.,1978, 55, с. 1293—1300.

Поступила в редакцию
18.01.80