

УДК 53.07:778.534.49

ЗАДАЧА ШУМОПОДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Г. Ермолаев, Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Рассмотрим изображение, заданное квадратной $N \times N$ матрицей вида

$$A(\sigma) = A + \sigma B, \quad (1)$$

где A — матрица идеального изображения, B — изображение шума, σ — «малый параметр». Число N также считается параметром задачи, который предполагается «достаточно большим». Рассмотрим задачу восстановления матрицы A из наблюдаемой $A(\sigma)$ при больших N и малых σ . В работе построена такая матрица $A_k(\sigma)$, что $\|A_k(\sigma) - A\| / \|\sigma B\| \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$. При этом предполагается, что нормы матриц A и B имеют порядок $O(N)$, а минимальное расстояние между собственными значениями матрицы A^+A — порядок $O(N^2)$ при $N \rightarrow \infty$.

Определим матричные нормы:

$$\|C\|_\infty = \sup |c_{ij}|, \quad (2)$$

$$\|C\|_2 = (\text{tr } C^+C)^{1/2}. \quad (3)$$

Будем считать A и B в (1) фотоизображениями, тогда

$$0 < a_{\min} \leq a_{ij} \leq a_{\max}, \quad 0 < b_{\min} \leq b_{ij} \leq b_{\max} \quad (i, j = 1, \dots, N),$$

где $a_{\min}$ и $b_{\min}$ являются плотностью вуали, а $a_{\max}$ и $b_{\max}$ — плотностью максимального почернения фотоматериала. Очевидно, что $\|A\|_\infty \leq a_{\max}$, $\|B\|_\infty \leq b_{\max}$ и

$$\|A\|_2 = O(\|B\|_2) = O(N). \quad (4)$$

Специальным свойством изображения A будем считать условие

$$\Delta = \min_{i \neq j} |\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j| = O(\|A\|_2^2) = O(N^2), \quad (5)$$

здесь $\hat{\lambda}_i$ — собственные значения матрицы A^+A с учетом кратности.

Теорема 1. Если выполнены (4) и (5), то $\text{rank } A = O(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Следствие. Пусть $\text{rank } A = k$, тогда $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_N = 0$ и $\hat{\lambda}_i = O(N^2)$ ($i = 1, \dots, k$).

Замечание. Если $\text{rank } A = 1$ и справедливо (4), то (5) всегда выполнено.

Известно [1], что любую матрицу A можно представить в виде

$$A = U \Lambda^{1/2} V^+,$$

где матрица $\Lambda^{1/2} \geq 0$ и диагональна, U и V унитарны, причем $AA^+ = U \Lambda U^+$, $A^+A = V \Lambda V^+$, т. е. U и V суть матрицы ортонормированных

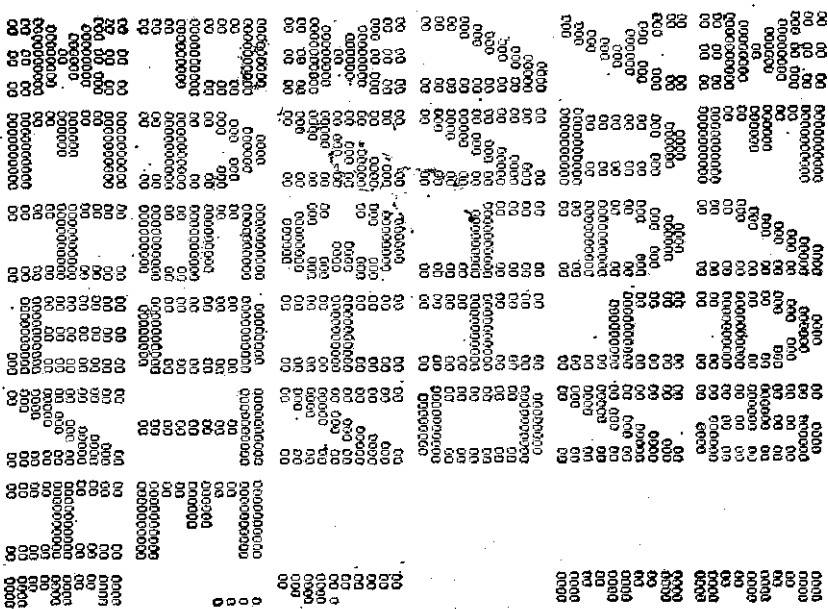


Рис. 1. Исходное изображение — модель фрагмента машинного текста (64×64)

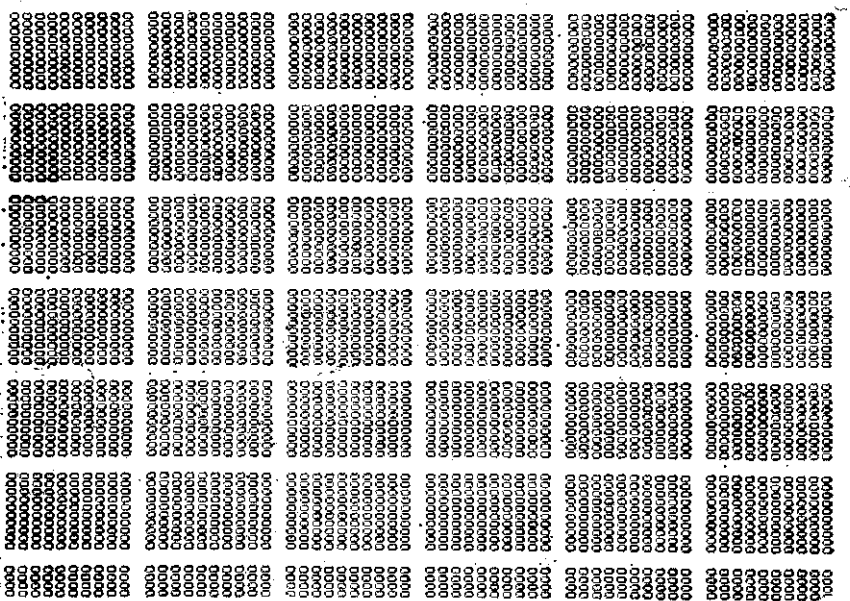


Рис. 2. Преобразованное изображение, имеющее ранг, равный 2. Описанный метод здесь использован для нахождения областей, содержащих не более одной буквы, которые и выделены на изображении

собственных векторов для AA^+ и A^+A соответственно, а $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_N = 0$.

Аналогично

$$A(\sigma) = A + \sigma B = U(\sigma) \Lambda^{1/2}(\sigma) V^+(\sigma).$$

Пусть $E_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $\text{rank } E_k = k$, $E_k^2 = E_k$.

Теорема 2. Матрица $A_k(\sigma) = U(\sigma) E_k \Lambda^{1/2}(\sigma) V^+(\sigma)$ является наилучшей в норме $\|\cdot\|_2$ аппроксимацией $A(\sigma)$ матрицами, ранг которых не выше k , т. е.

$$\|A_k(\sigma) - A\|_2 = \inf \{ \|R - A(\sigma)\|_2, \text{rank } R \leq k \}.$$

При достаточно слабых ограничениях на шум $A_k(\sigma)$ является оценкой максимального правдоподобия матрицы A . Определим скалярное произведение матриц соответственно (3):

$$(C, D) = \text{tr } C^+ D.$$

Теорема 3. Пусть $\sigma B = Q$, Q — случайная матрица, у которой $EQ = 0$ и задан корреляционный оператор $\Sigma = EQ(\cdot, Q)$. Если плотность распределения Q есть монотонно убывающая функция $\|\Sigma^{-1/2} X\|_2$, (X — реализация Q), то $A_k(\sigma)$ есть оценка максимального правдоподобия матрицы A в норме $\|\cdot\| = \|\Sigma^{-1/2} \cdot\|_2$.

Поставленную задачу шумоподавления будем решать в рамках аналитической теории возмущений [2]; в этом случае

$$\|A_k(\sigma) - A\|_2 / \|\sigma B\|_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sigma^p \alpha_p \quad (6)$$

и радиус сходимости ряда (6) может быть оценен снизу величиной

$$r_0 = \frac{2}{9} \cdot \frac{\Delta}{\|A\|_2 \|B\|_2}, \quad (7)$$

В силу (4) и (5) r_0 является величиной порядка $O(1)$ по N , поэтому при $|\sigma| \leq r_0$ можно переходить к пределу $N \rightarrow \infty$ под знаком суммы в (6).

Теорема 4. Если выполнены условия (4), (5) и (7) и $|\sigma| \leq r_0$, то: а) коэффициенты степенного ряда (6) $\alpha_p = O(N^s)$, $s \leq -1/2$; б) $\|A_k(\sigma) - A\|_2 / \|\sigma B\|_2 \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) не медленнее, чем $\text{const}/\sqrt{N}$.

Таким образом, отношение «сигнал/шум»

$$\|A\|_2 / \|A_k(\sigma) - A\|_2 = \text{const} \cdot \sqrt{N}$$

и может быть сделано сколь угодно большим при $N \rightarrow \infty$.

Работа алгоритма, реализующего предложенный метод, иллюстрируется фотографиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969, с. 15—21. [2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, с. 85—161.

Поступила в редакцию
12.01.81