

УДК 538.56 : 535

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ

В. П. Кандидов, В. И. Леденев

(кафедра общей физики и волновых процессов)

1. В теоретических исследованиях переноса излучения в случайно-неоднородных средах применяется наряду с другими метод статистических испытаний, в котором моделируются отдельные реализации действительного процесса распространения. Усреднение по ансамблю этих реализаций позволяет найти статистические характеристики прошедшего излучения, надежность которых растет с увеличением объема выборки [1].

При получении отдельных реализаций распространения света в турбулентной атмосфере могут использоваться различные физические модели. В работе [2] распространение оптического излучения рассматривается как марковская цепь со случайными актами взаимодействия фотонов с веществом. Распространение волн оптического диапазона в турбулентной атмосфере можно также представить как прохождение последовательности фазовых экранов, моделирующих возмущения волнового фронта на флуктуациях показателя преломления. В работе [3], например, показано, что эффективная ширина светового пучка, прошедшего последовательность фазовых экранов при увеличении числа экранов, стремится к эффективной ширине пучка, прошедшего слой случайно-неоднородной среды.

Представляет интерес использование модели фазовых экранов в методе статистических испытаний для исследования на ЭВМ распространения волновых пучков в случайно-неоднородных средах. В этом случае возникает задача о моделировании на пространственной сетке случайного поля $\{\epsilon_{m,n}\}$ с заданной статистикой. Некоторые вопросы практического получения на ЭВМ случайных полей, используемых в атмосферной оптике, рассматриваются в настоящей работе.

Большинство методов моделирования полей $\{\epsilon_{m,n}\}$ основывается на преобразовании δ -коррелированного случайного поля $\{\eta_{ij}\}$, определенного в узлах сетки

$$\langle \eta_{ij} \eta_{kl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad i, k = 1, \dots, N_x, \quad j, l = 1, \dots, N_y \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а N_x и N_y — число элементов δ -коррелированного поля по осям X и Y соответственно. К этим методам относятся метод линейного преобразования, метод канонических разложений, частным случаем которого является разложение в ряд Фурье, а также метод скользящего суммирования. В первых двух методах матрица преобразования поля $\{\eta_{ij}\}$ в искомое $\{\epsilon_{m,n}\}$ вычисляется для всей сетки, что связано с большими затратами вычислительного времени и не позволяет увеличивать размеры поля $\{\epsilon_{m,n}\}$ путем последовательного получения его элементов $\epsilon_{m,n}$ из элементов η_{ij} . От этого недостатка свободен метод скользящего суммирования, в котором осуществляется суммирование с весом ближайших элементов δ -коррелированного по-

ля [4]:

$$\varepsilon_{m,n} = \sum_{k=-M_x}^{M_x} \sum_{l=-M_y}^{M_y} C_{kl} \eta_{m+k, n+l}, \quad \begin{matrix} m = M_x + 1, \dots, N_x - M_x, \\ n = M_y + 1, \dots, N_y - M_y. \end{matrix} \quad (2)$$

Весовые коэффициенты C_{kl} определяются по заданной корреляционной функции R или по спектральной плотности F поля $\{\varepsilon\}$. С увеличением числа коэффициентов M_x и M_y и уменьшением шага пространственной сетки характеристики поля $\{\varepsilon\}$ приближаются к заданным. Одновременно с этим растет объем вычислений и, следовательно, время получения достаточной выборки реализаций.

В настоящей работе метод скользящего суммирования используется для получения одномерных и двумерных изотропных случайных полей, моделирующих флуктуации диэлектрической проницаемости воздуха ε в турбулентной атмосфере. Рассматривается возможность введения критериев для практической оценки числа весовых коэффициентов C_{kl} при моделировании на ЭВМ полей с различными корреляционными функциями.

2. Согласно [5] флуктуации диэлектрической проницаемости атмосферы имеют закон распределения вероятности, близкий к нормальному, с нулевым средним значением и с дисперсией, пропорциональной структурной постоянной C^2_ε . Ограничимся случаем однородного случайного поля ε . Если двумерный спектр пространственных частот κ поля $\varepsilon(x, y)$ ограничен сверху ($|\kappa_x|, |\kappa_y| \leq \kappa_0$), то на шаг сетки необходимо наложить условие

$$\Delta x, \Delta y \leq \pi/\kappa_0. \quad (3)$$

В этом случае весовые коэффициенты C_{kl} вычисляются по формуле [4]

$$C_{kl} = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta x} \int_0^{\pi/\Delta y} F^{1/2}(\kappa_x, \kappa_y) \cos(k \Delta x \kappa_x) \cos(l \Delta y \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (4)$$

$$k = -M_x, \dots, M_x; \quad l = -M_y, \dots, 0, \dots, M_y,$$

$F(\kappa_x, \kappa_y)$ — двумерная спектральная плотность поля $\varepsilon(x, y)$.

При выбранном шаге $\Delta x, \Delta y$ числа M_x, M_y определяются характерным масштабом корреляционной функции $R(x, y)$ моделируемого поля. Действительно, в узлах сетки ее значения равны:

$$R_{m,n} = R(m \Delta x, n \Delta y) = \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{i+m, j+n} \rangle.$$

Согласно формулам метода скользящего суммирования (1), (2) корреляционная функция на сетке $R^c_{m,n}$, вычисленная по весовым коэффициентам, имеет вид:

$$R^c_{m,n} = \begin{cases} \sum_{k=-M_x}^{M_x-m} \sum_{l=-M_y}^{M_y-n} C_{kl} C_{k+m, l+n} & \text{при } m \leq 2M_x + 1, n \leq 2M_y + 1, \\ 0 & \text{при } m > 2M_x + 1, n > 2M_y + 1. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда число членов в сумме (2) ограничено снизу условием

$$2M_x + 1 \geq 2Q_0/\Delta x, \quad 2M_y + 1 \geq 2Q_0/\Delta y, \quad (6)$$

если корреляционная функция $R(x, y) \simeq 0$ при $|x|, |y| \leq Q_0$.

На практике спектральная плотность $F(\kappa_x, \kappa_y)$ неограничена и непосредственно оценки (3), (6) неприменимы. Однако характерные масштабы κ функции $F(\kappa_x, \kappa_y)$ и масштабы Q для $R(x, y)$ связаны обратнo пропорциональной зависимостью. Поэтому в соответствии с (3), (6) число коэффициентов C_{kl} в (2) определяется произведениями $(\kappa Q)_x$ и $(\kappa Q)_y$ или отношениями $Q_x/\Delta x$, $Q_y/\Delta y$ для пространственной сетки.

Рассмотрим изотропное поле $\varepsilon(x, y)$. В качестве масштаба функции $R(x, y)$ возьмем эффективный радиус корреляции Q [5]:

$$Q = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} R(r) dr. \quad (7)$$

Пусть $\Delta x = \Delta y = h$. Тогда коэффициенты C_{kl} образуют квадратную матрицу с равным числом строк и столбцов: $2M_x + 1 = 2M_y + 1 = M$. Положим, что для M по аналогии с (6) справедлива следующая оценка:

$$M = \alpha \cdot Q/h. \quad (8)$$

Значение α определяется видом корреляционной функции $R(x, y)$, точностью моделирования поля $\varepsilon(x, y)$. Выражение (8) означает, что систематическая погрешность метода зависит от одного параметра α , который равен отношению наибольшего сдвига Mh элементов δ -коррелированного поля в (2) к эффективному радиусу корреляции Q .

По корреляционной функции $R_{m,n}^c$ можно оценить систематическую погрешность метода, вводя, например, следующие критерии: относительное отклонение дисперсии

$$d_\sigma = |R(0) - R_{0,0}^c|/R(0);$$

относительное отклонение эффективного радиуса корреляции

$$d_Q = |Q - Q^c|/Q,$$

где эффективный радиус Q^c на пространственной сетке вычисляется согласно (7) численным интегрированием по узловым значениям корреляционной функции $R_{m,n}^c$;

среднеквадратичное отклонение $R_{m,n}^c$ от значений известной корреляционной функции $R(mh, nh)$, взятых в узлах сетки

$$\chi = \left[\sum_m \sum_n (R(mh, nh) - R_{m,n}^c)^2 \right]^{1/2} h/(QR(0)).$$

3. Рассмотрим одномерное поле с гауссовой спектральной плотностью

$$F(\kappa) = \sqrt{\pi} \sigma^2 r_0 \exp(-\kappa^2 r_0^2/4). \quad (9)$$

В этом случае

$$R(0) = \sigma^2 \text{ и } Q = \frac{r_0 \sqrt{\pi}}{2}.$$

На рис. 1 приведены для двух значений параметра $\alpha = Mh/Q$ корреляционные функции, построенные по узловым значениям $R_{m,n}^c$, которые вычислялись по формулам (4), (5). С ростом α узловые значения $R_{m,n}^c$ приближаются к $R(mh)$ независимо от величины шага h , который менялся в диапазоне $(1 \div 4 \cdot 10^{-2})r_0$. Начиная с $\alpha \approx 3$ значения $R_{m,n}^c$ практически совпадают с заданной функцией $R(mh)$.

Зависимость критериев точности от параметра α изображена на рис. 2. Относительное отклонение эффективного радиуса корреляции d_Q превышает ошибку в оценке дисперсии d_σ ; среднеквадратичное отклонение χ имеет наибольшее значение.

Из рис. 2 видно, что критерии точности при моделировании поля с гауссовой спектральной плотностью составляют: $d_\sigma \approx 10^{-4}$, $d_Q \approx 10^{-2}$, если параметр $\alpha \approx 3$. При этом значении параметра α наибольший сдвиг элементов δ -коррелированного поля при формировании искомого $\{\varepsilon_m\}$ приблизительно втрое превышает эффективный радиус корреляции Q .

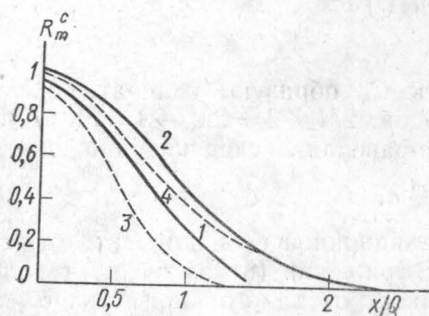


Рис. 1. Зависимость значений корреляционной функции R_m^c от безразмерного радиуса x/Q : сплошные линии — корреляционная функция, соответствующая гауссовой спектральной плотности (9); $\alpha=1,55$ (1) и $\alpha=6,05$ (2); пунктир — корреляционная функция, соответствующая кармановскому спектру (10); $\alpha=1,27$ (3) и $\alpha=3,4$ (4)

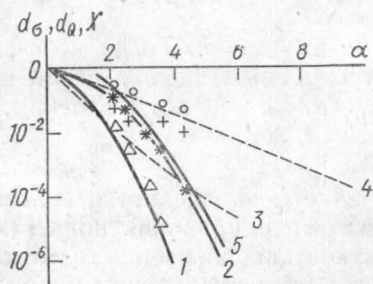


Рис. 2. Зависимость относительной ошибки в оценке дисперсии d_σ и эффективного радиуса корреляции d_Q от параметра $\alpha = Mh/Q$. Поле с гауссовой спектральной плотностью: одномерное поле (9) (сплошные линии), d_σ (1), d_Q (2), χ (5); двумерное поле (11), + — d_σ ; \circ — d_Q . Поле с кармановской спектральной плотностью: одномерное поле (10) (пунктир), d_σ (3), d_Q (4); двумерное поле (12), Δ — d_σ ; * — d_Q

Приведенные результаты получены при широких диапазонах изменения шага сетки h и числа M . Таким образом, для поля с заданным масштабом Q систематическая погрешность метода скользящего суммирования убывает с ростом параметра α , что может быть достигнуто как увеличением шага сетки h при неизменном числе M , так и увеличением числа весовых коэффициентов M на сетке с неизменным шагом h .

Для одномерного поля, соответствующего кармановскому спектру флуктуаций диэлектрической проницаемости в атмосфере, т. е. для

$$F(x) = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(11/6)}{\Gamma(4/3)} \frac{\sigma^2 r_0}{(1 + r_0^2 x^2)^{11/6}}, \quad (10)$$

корреляционную функцию $R(x)$ можно записать в виде

$$R(x) = \sigma^2 \frac{1}{2^{1/3} \Gamma(4/3)} \left(\frac{x}{r_0}\right)^{4/3} K_{4/3}\left(\frac{x}{r_0}\right),$$

$$R(0) = \sigma^2, \quad Q = r_0 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(11/6)}{\Gamma(4/3)} \approx 1,865 r_0,$$

где $K_{4/3}(x)$ — функция Макдональда.

Изменение корреляционной функции на сетке R_m^c с расстоянием x при двух значениях α дано на рис. 1. Удовлетворительное моделирование со спектром (10) достигается с $\alpha \geq 3$; при этом $d_\sigma \leq 10^{-2}$ и $d_Q \leq 10^{-1}$ (рис. 2). Заметим, что для случайных полей, у которых корреляционная функция не характеризуется одним масштабом, параметр α не определяет однозначно точность моделирования.

Посредством численного эксперимента определялись корреляционные функции R_m^e полей $\{\epsilon_m\}$, полученных на ЭВМ по методу скользящего суммирования с параметром α , оцененным по (8). Для одномерных полей со спектральными плотностями (9) и (10) функции R_m^e , вычисленные по выборке из $100 \div 200$ реализаций, практически совпадают с R_m^c при одном и том же α .

4. При моделировании двумерных полей возникает также погрешность, связанная с ориентацией прямоугольной сетки. Можно ввести относительное отклонение эффективных радиусов корреляции, являющееся мерой неізотропности полученного поля:

$$\omega = \frac{|Q^c - Q_g^c|}{Q^c + Q_g^c},$$

где Q_g^c — эффективный радиус корреляции, вычисленный по диагоналям сетки: $m = \pm n$, Q^c — эффективный радиус, вычисленный по сторонам сетки: $m = \text{const}$ или $n = \text{const}$.

Для двумерного поля с гауссовой спектральной плотностью

$$F(x_x, x_y) = \sigma^2 \pi r_0^2 \exp(-x^2 r_0^2/4) \quad (11)$$

отклонения d_σ и d_Q несколько превышают соответствующие величины для одномерного поля при одних и тех же значениях параметра α (см. рис. 2). Неізотропность поля ω имеет при этом порядок 10^{-2} при $\alpha = 3$, незначительно убывая с ростом параметра α .

Кармановский спектр двумерного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы записывается в виде [5]:

$$F^e(x_x, x_y) = \sigma^2 r_0^2 \frac{10\pi}{3} (1 + r_0^2 x^2)^{-11/6}. \quad (12)$$

Корреляционная функция выражается следующим образом:

$$R^e(x, y) = \sigma^2 \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{\rho}{r_0}\right),$$

$$R^e(0) = \sigma^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad Q^e = r_0 \frac{5\sqrt{\pi} \Gamma(4/3)}{6 \Gamma(11/6)} = 1,4041 r_0.$$

Как показывает анализ, удовлетворительная точность метода скользящего суммирования достигается для этого поля при $\alpha > 3$ (см. рис. 2). Заметим, что в этом случае d_σ и d_Q близки к соответствующим отклонениям для одномерного поля с гауссовой спектральной плотностью. Неізотропность ω поля (12) составляет порядок 10^{-2} при $\alpha \sim 3$.

На рис. 3 приведена корреляционная функция $R(r/Q)$ поля (12). Значения $R_{m,n}^e$, вычисленные по коэффициентам C_{kl} при $M=19$, практически совпадают с соответствующими значениями $R(mh, nh)$. Численное моделирование на ЭВМ двумерного поля проводилось на квадратной сетке размером 20×20 узлов, при этом δ -коррелированное поле генерировалось на сетке размером 38×38 узлов. При статистической обработке случайных полей $\{\epsilon_{m,n}\}$, полученных на ЭВМ, проводилось

усреднение как по реализациям, так и по сечениям сетки. Определенные таким образом значения корреляционной функции $R_{m,n}^e$ в узлах сетки приведены на рис. 3.

В модели (12) r_0 связано с внешним масштабом атмосферной турбулентности, который обычно превышает характерные размеры исследуемых процессов, например поперечных размеров a пучков когерентного излучения. Это накладывает ограничения сверху на шаг сетки $h < a$. Одновременно из оценки (8) и формулы (12) согласно полученным результатам следует, что число коэффициентов в алгоритме скользящего суммирования (2) должно удовлетворять условию $M \geq 4r_0/\Delta x$.

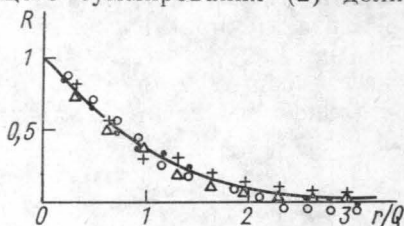


Рис. 3. Корреляционная функция поля с кармановской плотностью (12): сплошная линия — $R(r)$ и $R_{m,n}^e$; точки — $R_{m,n}^e$, полученная в результате усреднения по 150 реализациям — $m = \text{const}$ (○), $n = \text{const}$ (●), $m = n$ (△), $m = -n$ (+)

В результате моделирование двумерных полей вида (12) для задач распространения световых пучков в атмосфере связано с большим объемом вычислений, поскольку число слагаемых $(2M_x + 1) \cdot (2M_y + 1)$ в алгоритме (2) может достигать нескольких сотен.

5. Проведенный анализ и численные эксперименты на ЭВМ показывают, что точность моделирования с помощью метода скользящего суммирования случайных полей типа (9), (10), (11), (12) с одномасштабными корреляционными функциями определяется параметром α , который означает, сколько раз на расстоянии Mh , равном сдвигу δ -коррелированного поля, формирующего $\{\epsilon_{m,n}\}$, укладывается эффективный радиус корреляции исследуемого поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
 [2] Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Под ред. Г. И. Марчука. Новосибирск: Наука, 1976. [3] Петрищев В. А. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1971, № 9, с. 1416. [4] Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиофизике. М.: Сов. радио, 1971. [5] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978, ч. 2.

Поступила в редакцию
08.02.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 1

УДК 539.196 : 621.378.325 : 546.214

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ГАЗОВОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОМ ОЗОНЕ

В. Я. Панченко, И. М. Сизова, А. П. Сухоруков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

1. Введение. Резонансное возбуждение молекулярного газа интенсивным ИК-излучением приводит к образованию резко неравновесных населенностей колебательно-вращательных уровней молекулы. В процессе релаксации таких молекул к состоянию термодинамического равновесия вследствие нерезонансности процессов $V-V$, $V-V'$ и $R-T$,