$$^{\mathrm{m}}(B_1) \underset{\mathrm{n}_1}{\bullet} ((A_2) + (B_2) \underset{\mathrm{n}_2}{\bullet} ((A_3) + (B_3) \underset{\mathrm{n}_3}{\bullet} ((A_4) + (B_4))))_n, \qquad \text{(III)}$$

$$^{\mathrm{m}}(B_1) \underset{\mathrm{n}_1}{\bullet} ((A_2) + (B_2) \underset{\mathrm{n}_2}{\bullet} ((A_3) + (B_3) \underset{\mathrm{n}_3}{\bullet} (A_4)))_n. \qquad \text{(IV)}$$

Цепь I можно считать основной, ибо цепи II и III получаются из нее при отключении $^{\mathrm{m}}(B_4)_{\mathrm{n}}$ и соответственно $^{\mathrm{m}}(A_1)_{\mathrm{n}}$, а цепь IV — посредством отключения обоих этих (m, n)-полюсников. Схематичные изображения и символы цепей (I)—(IV) приведены на рис. 5.

Изложенный в этой статье метод позволяет любое ПК-соединение представить некоторым символом и, наоборот, по каждому символическому выражению, содержащему знаки лишь П- и К-соединений МП, позволяет однозначно начертить схематичное изображение МП-цепи, обозначенной данным выражением. Этот метод является некоторым обобщением и распространением на МП-цепи метода, предложенного первоначально для двухполюсных цепей, построенных исключительно из двухполюсников [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Поваров Г. Н. ДАН СССР, 1954, 94, № 6, с. 1075. [2] Карни Ш. Теория цепей. М.: Связь, 1973. [3] Шестаков В. И. ЖТФ, 1941, т. XI, вып. 6, с. 532.

Поступила в редакцию
13.03.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 1

УДК 530.12 : 531.51

ЗАВИСИМОСТЬ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ОТ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

1. Введение. За прошедшие годы многочисленные безуспешные попытки сформулировать общее определение ненулевой локальной энергии-импульса гравитационного поля в рамках эйнштейновской общей теории относительности привели к своеобразному «эффекту накопления»: в литературе часто можно встретить утверждение о принципиальной «нелокализуемости» (см., например, [1]) энергии-импульса гравитационного поля, хотя это утверждение никогда не было строгим выводом из теории.

Обычно его высказывают со ссылкой на принцип эквивалентности, подчеркивая тот факт, что символы Кристоффеля можно обратить в нуль в любой точке подходящим выбором системы координат. В действительности этот аргумент не имеет доказательной силы, ибо истинной мерой напряженности гравитационного поля при римановом подходе является риманов тензор кривизны, а не символы Кристоффеля (на такую роль тензора кривизны обращали внимание многие авторы, обычно при рассмотрении девиаций геодезических; см., в частности, [2]). Вынужденное при этом использование так называемых псевдотензоров для расчета «нелокализуемой» энергии-импульса явно противоречит (см. подробнее [3—5]) принципу ковариантности, на котором основывается эйнштейновская общая теория относительности, как на одном из исходных принципов.

Трудности эйнштейновской теории, связанные с формулировкой энергии-импульса поля, фактически были предопределены описанием гравитационного поля римановой геометрией. Это происходило потому, что риманов метрический тензор не позволяет в римановой геометрии в общем случае построить истинный закон сохранения. Однако невозможность формулировки ковариантного и интегрируемого закона сохранения ненулевой локальной энергии-импульса гравитационного поля не следует неизбежно из каких-либо физических принципов, поскольку гравитационное поле можно описывать не только собственно римановой геометрией.

В § 2 кратко рассматривается гравитационное поле как четырехвекторное. Показано, что в этом представлении теории при весьма общих условиях на полевой лагранжиан существует интегрируемый и ковариантный закон сохранения локальной энергии-импульса поля, полностью аналогичный закону сохранения энергии-импульса классического электромагнитного поля.

В § 3 мы переходим к так называемому представлению Клебша. При этом, в силу одной теоремы вариационного исчисления, оказывается, что в представлении Клебша тензор энергии-импульса поля всюду равен нулю. Наши последующие построения будут строго ковариантны.

2. Четырехвекторное представление гравитационного поля. Пусть x^i — локальные координаты пространственно-временного многообразия; $i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4$. По аналогии с описанием электромагнитного поля векторным потенциалом $A_i(x)$ введем четыре линейно независимых в каждой точке достаточно гладких ковариантных векторных поля $h_i^P(x)$, $P, Q, \ldots = 0, 1, 2, 3$. Взаимная четверка контравариантных векторных полей будет обозначаться через $h^i{}_P(x)$ так, что $h^P{}_i(x)h^i{}_Q(x) = \delta^P{}_Q$, где $\delta^P{}_Q$ — символ Кронекера. Пространственно-временной риманов метрический тензор $g_{ij}(x)$ можно построить согласно определению

$$g_{ij} = \eta_{PQ} h^P{}_i h^Q{}_j, \tag{1}$$

где среди коэффициентов η_{PQ} отличны от нуля только $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$.

Как и в электродинамике, введем тензоры напряженности, отвечающие полям $h^P{}_i(x)$:

$$F^P{}_{ij} = \partial_i h^P{}_j - \partial_j h^P{}_i. \tag{2}$$

Мы пишем ∂_i вместо $\partial/\partial x^i$. Удобны обозначения $F^P{}_{QR} = h^i{}_Q h^j{}_R F^P{}_{ij}$, $F^{PQR} = \eta^{QM}\eta^{RN}F^P{}_{MN}$, $\eta^{QM} = \eta_{QM}$, $h = \det(h^P{}_i)$.

Предположим, как обычно, что полевые уравнения для $h^P{}_i(x)$ имеют второй порядок, являются ковариантными и получаются из соответствующей плотности лагранжиана Λ. Кроме того, потребуем, чтобы производные от $h^P{}_i$ входили в Λ только в кососимметричных комбинациях (2). Тогда плотность лагранжина, очевидно, представится в следующем виде:

$$\Lambda(h^P{}_i, \partial_j h^P{}_i) = hL(F^P{}_{QR}), \tag{3}$$

где $L(F^P{}_{QR})$ — произвольная (достаточно гладкая) функция скаляров $F^P{}_{QR}$.

Из (3) мы имеем

$$T_P{}^j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{h}\,\frac{\partial (hL)}{\partial h_j^P} = -2F^Q{}_{kP}\,\frac{\partial L}{\partial F^Q{}_{kj}} + h_P^j L, \tag{4}$$

$$K_P{}^{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{h}\,\frac{\partial (hL)}{\partial (\partial_i h_j^P)} = 2\,\frac{\partial L}{\partial F^P{}_{ij}}. \tag{5}$$

Полевые уравнения в пустоте примут вид

$$\nabla_i K_P{}^{ij} = T_P{}^j, \tag{6}$$

где ∇_i — риманова ковариантная производная относительно тензора (1). Поскольку величины (5) кососимметричны, то в силу уравнений (6) выполняются следующие законы сохранения:

$$\nabla_j T_P{}^j = 0. \tag{7}$$

Как мы отмечали в предыдущей работе [6], законы сохранения вида (7) ковариантны и интегрируемы: среди скаляров $E_P = \int\limits_V T_P^j h ds_j$, где V — какая-либо трехмерная гиперповерхность интегрирования, а ds_j — элемент трехмерной площади, E_0 имеет смысл энергии, а E_1, E_2, E_3 — трех компонент импульса в V. Если V выбрать замкнутой, то по теореме Гаусса из (7) последует $E_P=0$, что и оправдывает название «закон сохранения». Выражение (4) аналогично тензору энергии-импульса электромагнитного поля, непосредственно обобщая его на случай четырех векторных полей. Структура полевых уравнений (6) такова, что источником поля в пустоте является тензор энергии-импульса $T_P{}^j$ (точнее, набор четырех сохраняющихся токов $T_0{}^j$, $T_1{}^j$, $T_2{}^j$, $T_3{}^j$).

Если исходить из эйнштейновской плотности лагранжиана $\Lambda = \mathrm{const}\cdot hR$, где R — свертка риманова тензора кривизны, и выразить метрический тензор через поля $h_i^P(x)$ согласно (1), а затем отбросить дивергенцию, содержащую все вторые производные, то останется плотность лагранжиана вида (3). Соответствующие уравнения поля (6), очевидно, будут эквивалентны уравнениям Эйнштейна. В результате мы получим просто новое представление (а именно четырехвекторное) эйнштейновской теории, и в этом представлении никаких проблем, связанных с локальной энергией-импульсом гравитационного поля, не возникает. Другие плотности лагранжиана (3) будут вести к неэйнштейновским уравнениям.

Последним вопросом, на который нам остается ответить в этой связи, является вопрос об уравнениях движения пробных тел при настоящем подходе. Хорошо известно, что в общей теории относительности уравнения движения пробных тел выводятся из уравнений поля (см., например, [2], гл. IV, § 4). Несложным расчетом можно аналогично показать, что любая плотность лагранжиана (3) в силу соответствующих ей уравнений поля требует, чтобы (как и в собственно эйнштейновской теории) пробные тела двигались по римановым геодезическим.

3. Электромагнитное и гравитационное поле в представлении Клебша. Пусть $A_i(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле на четырехмерном дифференцируемом многообразии. Тогда (локально) существуют такие четыре скаляра $P_a(x)$, $Q^a(x)$, $a=1, 2$, что

$$A_i = P_a \partial_i Q^a \tag{8}$$

(см. [7—9]). Скаляры P_a, Q^a называются *потенциалами Клебша.* О переходе к потенциалам Клебша говорят как о переходе к *представлению Клебша.* Для векторного поля наиболее общего вида скаляры P_1, P_2, Q^1, Q^2 независимы, что нами предполагается в дальнейшем. Разумеется, по заданному векторному полю потенциалы Клебша определяются неоднозначно, с точностью до соответствующего калибровочного преобразования (оно описано в работах [7—9]).

Пусть теперь $A_i(x)$ — векторный потенциал (классического) электромагнитного поля. Запишем плотность лагранжиана электромагнитного поля в стандартном виде

$$\Lambda = \mathrm{const}\cdot\sqrt{-g}\,F_{ij}\,F^{ij} \equiv \sqrt{-g}\,L \tag{9}$$

($g=\det(g_{ij})=-h^2$). Здесь $F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i$ или, после подстановки (8), $F_{ij}=\partial_i P_a \partial_j Q^a-\partial_j P_a \partial_i Q^a$. Прямым вычислением нетрудно убедиться, что *уравнения электромагнитного поля в представлении Клебша* $\partial_i[\partial\Lambda/\partial(\partial_i P_a)]-\partial\Lambda/\partial P_a=0$, $\partial_i[\partial\Lambda/\partial(\partial_i Q^a)]-\partial\Lambda/\partial Q^a=0$ *эквивалентны уравнениям Максвелла в пустоте.* Более того, запись тензора энергии-импульса электромагнитного поля в представлении Клебша

$$T_i{}^j=\partial_i P_a \partial L/\partial(\partial_j P_a)+\partial_i Q^a\,\partial L/\partial(\partial_j Q^a)-\delta_i^j L$$

дает выражение

$$T_i{}^j=\mathrm{const}\cdot\left(-F^{jn}F_{in}+\frac{1}{4}\delta_i^j F^{mn}F_{mn}\right), \tag{10}$$

не зависящее от калибровки потенциалов Клебша. Мы видим, что *получилось именно то выражение, которое обычно приводится в литературе в качестве симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля**.

Заметим в этой связи, что формальная запись тензора энергии-импульса электромагнитного поля в $A_i(x)$-представлении

$$T_i{}^j=\partial_i A_n\frac{\partial L}{\partial(\partial_j A_n)}-\delta_i^j L \tag{11}$$

не дает выражения (10): для получения (10) из (11) приходится прибегать к довольно искусственной операции симметризации выражения (11) (см. [1, § 33]). Напротив, в представлении Клебша такая конструкция не требуется, и мы избавлены от неприятностей, связанных с тем, что выражение (11), записанное по формуле, заимствованной из теории поля в псевдоевклидовом пространстве, вообще не является геометрическим тензором.

Аналогично от четырехвекторного представления (§ 2) теории гравитационного поля можно перейти к представлению Клебша. Для этого мы вместо (8) пишем $h_i^R(x)=P_a^R\,\partial_i Q^{Ra}$ и далее

$$F^R{}_{ij}=\partial_i P_a^R\,\partial_j Q^{Ra}-\partial_j P_a^R\,\partial_i Q^{Ra}.$$

* Рассматривая электромагнитное поле как поле кососимметричного тензора (что развито в работе [7, § 6]), мы в качестве тензора энергии-импульса снова получим выражение (10), как это можно показать прямым расчетом.

Подставляя в (3), мы получим плотность лагранжиана гравитационного поля в представлении Клебша:

$$\Lambda = \Lambda (P_a^R,\ \partial_i P_a^R,\ \partial_i Q^{Ra}). \tag{12}$$

Оказывается, что *тензор энергии-импульса гравитационного поля в представлении Клебша тождественно равен нулю.*

Это утверждение вытекает из следующей общей теоремы вариационного исчисления: пусть полевые уравнения для набора N скалярных полей $w^A(x)$ $A=1, 2, ..., N$ получаются из плотности лагранжиана, построенной только по этим полям и их первым производным, т. е. $\Lambda = \Lambda(w^A, \partial_i w^A)$; тогда плотность тензора энергии-импульса тождественно равна нулю, т. е.

$$\partial_i w^A \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_j w^A)} - \delta_i^j \Lambda \equiv 0 \tag{13}$$

(см. [10, с. 271]).

Обратим внимание на тот факт, что тождество (13) аналогично обращению в нуль функции Гамильтона H динамической системы, когда функции Лагранжа $L(x, \dot{x})$ этой системы однородна степени $+1$ по $\dot{x}^i$, т. е. $L(x, k\dot{x}) = kL(x, \dot{x})$, $k>0$. Действительно, из этой однородности в силу теорем Эйлера об однородных функциях вытекает

$$H \overset{\text{def}}{=} \dot{x}^i \partial L/\partial \dot{x}^i - L = 0.$$

Такова характерная черта финслеровых метрических функций, рассматриваемых как функции Лагранжа динамической системы (см. [10]). Тождество (13) является обобщением тождества, характерного для финслеровых метрических функций, на полевой случай (см. подробнее [11], гл. IV, § 5).

Наконец, полезно отметить то обстоятельство, что плотность электромагнитного поля (9) после перехода к представлению Клебша является функцией не только потенциалов Клебша (полевые переменные), но также и метрического тензора $g^{ij}(x)$ (вспомогательные функции). Именно поэтому тензор энергии-импульса электромагнитного поля в представлении Клебша оказался отличным от нуля. Если же рассмотреть вместе электромагнитное и гравитационное поля (складывая плотности (3) и (9)), то в представлении Клебша суммарная плотность не будет содержать никаких других функций, кроме полевых переменных, и тензор энергии-импульса опять будет тождественно равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973. [2] Синг Д. Общая теория относительности. М., 1963. [3] Широков М. Ф. ДАН СССР, 1970, 195, № 814. [4] Логунов А. А., Фоломешкин В. Н. Теор и матем. физ., 1977, 32, № 2, с. 146. [5] Логунов А. А., Фоломешкин В. Н. Теор. и матем. физ., 1977, 32, № 3, с. 291. [6] Асанов Г. С. Теор. и матем. физ., 1979, 39, № 1, с. 75. [7] Rund H. In: Topics in differential geometry. N. Y., 1976, p. 111. [8] Rund H. Arch. Rat. Mech. Analysis, 1979, 71, № 3, p. 199. [9] Baumeister R. J. Math. Phys., 1978, 19, № 11, p. 2377. [10] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981. [11] Rund H. The Hamilton-Jacobi theorie in the calculus of variations. London & N. Y., 1966.

Поступила в редакцию
20.03.80